[illegible]

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

Par M. HALPHEN,

[illegible]

1re THÈSE. — [illegible]

2e THÈSE. — [illegible]

Soutenues le [illegible] Juillet 1878, devant la Commission d'Examen.

[illegible], *Président.*

[illegible]

[illegible] } [illegible]

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

[illegible]

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1878

N° D'ORDRE
408.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

Georges Henri

PAR M. HALPHEN,

Capitaine d'Artillerie, Répétiteur à l'École Polytechnique.

1re THÈSE. — SUR LES INVARIANTS DIFFÉRENTIELS.
2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le Juillet 1878, devant la Commission d'Examen.

MM. HERMITE, *Président*.
BOUQUET, DARBOUX, } *Examinateurs*.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1878

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS HONORAIRES	DUMAS.	
	PASTEUR.	
	DELAFOSSE.	
PROFESSEURS	CHASLES	Géométrie supérieure.
	P. DESAINS	Physique.
	LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
	PUISEUX	Astronomie.
	HÉBERT	Géologie.
	DUCHARTRE	Botanique.
	JAMIN	Physique.
	SERRET	Calcul différentiel et intégral.
	H. Ste-CLAIRE DEVILLE	Chimie.
	DE LACAZE-DUTHIERS	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BERT	Physiologie.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	BRIOT	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	BOUQUET	Mécanique physique et expérimentale.
	TROOST	Chimie.
	WURTZ	Chimie organique.
	FRIEDEL	Minéralogie.
	O. BONNET	Astronomie.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

4645 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, successeur de MALLET-BACHELIER, Quai des Augustins, 55.

THÈSE D'ANALYSE.

SUR

LES INVARIANTS DIFFÉRENTIELS.

Exposé du sujet.

Parmi les équations différentielles qui s'offrent dans les applications usuelles de l'Analyse à la Géométrie plane, il en est qui se reproduisent sans altération quand on effectue sur les variables une substitution homographique quelconque : telles sont les équations différentielles, en coordonnées rectilignes, des lignes droites, des coniques, etc.... Je nomme *invariant différentiel* le premier membre d'une telle équation.

C'est la Géométrie qui fournit ainsi les premiers exemples d'invariants différentiels ; c'est à l'Algèbre qu'il appartient d'en coordonner la théorie par la résolution de ce problème : *Former, sans en omettre aucun, les invariants différentiels de chaque ordre.* Résoudre cette question, tel est l'objet de cette thèse.

De même que dans la théorie des formes, on peut distinguer les invariants différentiels en invariants *relatifs* et *absolus*. Les premiers sont des fonctions qu'une substitution reproduit, multipliées par un facteur, les seconds sont des fonctions entièrement inaltérables. De même aussi que dans la théorie des formes, on obtient un invariant absolu par le quotient de deux invariants relatifs. Ces définitions posées, voici les résultats que j'ai obtenus :

Au-dessous du septième ordre, il n'existe que deux invariants différentiels relatifs, et aucun invariant absolu.

Pour le septième ordre, il existe un invariant absolu. De même, pour chaque ordre au-dessus du septième, il existe un invariant absolu nouveau.

Toute équation différentielle invariante, d'ordre égal ou supérieur à sept, consiste en une relation entre ces invariants absolus.

Les deux invariants qui seuls existent au-dessous du septième ordre sont précisément ceux que je rappelais plus haut; égalés à zéro, ils fournissent, l'un l'équation différentielle des lignes droites, l'autre celle des coniques. Pour pouvoir s'élever à la théorie générale, il manquait uniquement un invariant nouveau, l'invariant fondamental du septième ordre. C'est ce dernier qui, joint aux précédents, fournit le véritable point de départ, d'où l'on s'achemine aisément à la connaissance de tous les autres; aussi en ai-je fait une étude toute spéciale, en le définissant de deux manières : par des considérations géométriques d'abord, puis algébriquement. Voici un exposé succinct des considérations géométriques.

Par huit points arbitrairement donnés dans un plan, passe un faisceau de courbes du troisième degré ou *cubiques*. Toutes ces courbes ont, comme on sait, un neuvième point commun. Si donc, en chaque point m d'une courbe plane (m), on imagine les cubiques ayant, en ce point, avec cette courbe, des contacts du septième ordre, toutes les cubiques relatives à un même point m ont un neuvième point commun n; de la sorte, à chaque point m de la courbe (m) *correspond* dans le plan un point n. Or il suffit que les éléments différentiels de la courbe en un point m satisfassent à une seule condition pour que le point correspondant n coïncide avec m. Disons qu'alors m est un *point de coïncidence*. Sur une courbe quelconque, il y a donc généralement des points de coïncidence. Ce sont ceux en chacun desquels une certaine équation différentielle est satisfaite. Mais, si l'on intègre cette équation, on aura une courbe dont tous les points sont des points de coïncidence. L'équation dont il s'agit est évidemment du septième ordre; elle exprime une propriété projective, dans la définition de laquelle n'intervient aucune figure donnée. Son premier membre est donc un invariant différentiel. C'est l'invariant fondamental du septième ordre. La courbe dont tous les points sont des points de coïncidence fournit l'intégrale de cet invariant.

C'est par cette conception géométrique que je définis d'abord le nouvel invariant. Dans un premier paragraphe, j'étudie quelques propriétés des points de coïncidence, et j'en déduis l'expression analytique de cet invariant. Je me fonde, à cet effet, sur la représentation des cubiques par les fonctions elliptiques, et je rappelle tout d'abord les principes de ce mode de représentation.

Dans un deuxième paragraphe, je cherche l'intégrale de l'équation obtenue en égalant à zéro cet invariant. A cet effet, je substitue à l'équation un système d'équations du premier ordre, tiré de considérations géométriques. Je parviens ainsi au résultat suivant : *Les courbes dont tous les points sont des points de coïncidence sont les transformées homographiques de la spirale logarithmique qui coupe ses rayons sous l'angle de* 30 *degrés.*

Dans un troisième paragraphe, je montre que la connaissance de l'invariant fondamental du septième ordre, dont je viens de parler, et de son intégrale conduit à celle de tous les invariants jusqu'au huitième ordre exclusivement.

Le paragraphe suivant est consacré à une étude nouvelle et algébrique des mêmes fonctions.

Puis, dans le cinquième paragraphe, j'aborde la théorie des invariants d'ordre supérieur, au sujet desquels j'établis les résultats rappelés plus haut. J'obtiens, en outre, cette proposition : *L'intégration d'une équation différentielle invariante d'ordre* $(8+n)$ *se ramène à l'intégration successive d'une équation d'ordre n et d'une équation invariante du huitième ordre.*

Enfin, dans le sixième paragraphe, je fais une application de la théorie des invariants du huitième et du neuvième ordre, en formant *l'équation différentielle du huitième ordre des cubiques ayant un invariant absolu donné.* Je termine en montrant que le principe de dualité s'applique à cette théorie avec une extrême simplicité, et je forme, en l'appliquant, l'équation différentielle du neuvième ordre des courbes de troisième classe et du sixième degré, l'équation du huitième ordre de ces mêmes courbes dont l'invariant absolu est donné, enfin celle des courbes de troisième classe et du quatrième degré.

I. — *Propriétés des points de coïncidence. Leur équation différentielle.*

1. L'existence et les propriétés des *points de coïncidence,* définies dans l'exposé ci-dessus, apparaissent comme des conséquences immédiates de la représentation des courbes du troisième degré ou *cubiques* par les fonctions doublement périodiques. Je vais rappeler tout d'abord ce mode de représentation, imaginé par M. Clebsch, en suivant, à cet effet, une marche indiquée par M. Hermite ([1]), et dont voici le point de départ :

Si les coordonnées d'un point mobile sont des fonctions doublement périodiques d'un même argument, et que ces fonctions aient les mêmes périodes et les mêmes infinis, le lieu de ce point est une courbe algébrique dont le degré est égal au nombre des infinis de ces fonctions dans un parallélogramme des périodes.

Cette proposition se démontre comme il suit. Soient $2K$ et $2iK'$ les périodes. Posons, suivant l'usage,

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},\quad H(t) = 2\sum_{m=0}^{m=\infty}(-1)^m q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}\sin\frac{(2m+1)\pi t}{2K},\quad Z(t) = \frac{H'(t)}{H(t)}.$$

Suivant la propriété fondamentale des fonctions doublement périodiques, et relative à leur décomposition en éléments simples, due à M. Hermite, les coordonnées du point mobile peuvent être mises sous les formes suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} x = u + aZ(t-\alpha) + bZ(t-\beta) + cZ(t-\gamma) + \ldots \\ y = u' + a'Z(t-\alpha) + b'Z(t-\beta) + c'Z(t-\gamma) + \ldots \end{cases}$$

Les constantes α, β, γ, ... sont les infinis des deux fonctions; les

---

([1]) *Journal de Borchardt,* t. 82. Ce mode de représentation a été récemment généralisé par M. Lindemann, *ibid.,* t. 84.

constantes $a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots,$ qui sont leurs résidus, satisfont aux relations

$$(2) \qquad a+b+c+\ldots = a'+b'+c'+\ldots = 0.$$

Les valeurs de l'argument t qui correspondent aux points d'intersection d'une droite avec la courbe, lieu du point mobile, sont les zéros d'une fonction doublement périodique $(\mathrm{A}x + \mathrm{A}'y + \mathrm{B})$ dont les périodes et les infinis sont les mêmes que pour x et pour y. Dans un parallélogramme des périodes, cette fonction a autant de zéros que d'infinis. D'ailleurs, deux valeurs de l'argument qui ne diffèrent entre elles que par des multiples des périodes correspondent à un seul et même point; donc, sur une droite quelconque, le lieu possède un nombre de points égal à celui des infinis $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; ce qui démontre le théorème.

Voici maintenant une conséquence de cette analyse. Je fais une transformation homographique, en prenant pour nouvelles coordonnées X, Y, savoir :

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}'_1 y + \mathrm{B}_1}{\mathrm{A}x + \mathrm{A}'y + \mathrm{B}}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{\mathrm{A}_2 x + \mathrm{A}'_2 y + \mathrm{B}'_2}{\mathrm{A}x + \mathrm{A}'y + \mathrm{B}}.$$

Les quantités X, Y sont deux fonctions doublement périodiques de t, aux périodes $2\mathrm{K}$, $2i\mathrm{K}'$, et dont les infinis, différents de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, sont en même nombre que ces derniers; donc X et Y peuvent se mettre sous la même forme que x et y, sauf le changement des constantes $u, a, \ldots, \alpha, \ldots$ en d'autres. La fonction Z n'a pas changé.

D'où cette conclusion : *Le mode de représentation* (1) *est projectif et en outre la quantité q ou, ce qui revient au même, le rapport des périodes, est un invariant absolu.*

2. Occupons-nous tout spécialement du cas où les infinis α, β, γ sont au nombre de trois. La courbe (1) est une cubique. Les équations contiennent en apparence *treize* constantes; mais il est aisé de voir qu'en réalité elle en contient seulement *neuf*.

Une cubique est déterminée par *neuf* conditions. On est donc fondé à penser que les équations (1) peuvent représenter une cubique quelconque. Pour s'en convaincre, il suffit d'étudier quelques propriétés de la courbe (1).

3. D'après un théorème dû à M. Liouville, la somme des zéros que possède une fonction doublement périodique dans un parallélogramme des périodes est égale à la somme de ses infinis à l'intérieur du même contour. Ce théorème, appliqué à la fonction $(Ax + A'y + B)$, conduit à cette conséquence :

Les trois valeurs de l'argument qui correspondent aux points d'intersection de la cubique (1) *avec une droite ont pour somme* $(\alpha + \beta + \gamma)$, *à des multiples près des périodes, et réciproquement.*

D'où ces deux corollaires :

Les neuf valeurs de l'argument contenues dans la formule, où p et p' sont des entiers,

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} + \frac{2pK + 2p'iK'}{3}$$

répondent à des points d'inflexion.

D'un point quelconque de la courbe, on peut mener quatre droites qui lui soient tangentes en d'autres points. Si t est l'argument du premier point, les quatre points de contact ont pour arguments les quatre valeurs de

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma-t}{2} + pK + p'iK'.$$

L'un ou l'autre de ces deux corollaires prouve que *la cubique* (1) *est de sixième classe*. Pour prouver la réciproque, je prends un cas particulier des équations (1), et j'écris

$$(3) \qquad \begin{cases} x = Z(t) - Z(t+K), \\ y = \dfrac{i\pi}{2K} + Z(t+iK') - Z(t+K). \end{cases}$$

Je vais éliminer t entre ces deux équations. Suivant des notations très-connues, qu'il est inutile de rappeler, on a

$$Z(t) = \frac{H'(t)}{H(t)}, \quad Z(t+K) = \frac{H'_1(t)}{H_1(t)}, \quad Z(t+iK') = -\frac{i\pi}{2K} + \frac{\Theta'(t)}{\Theta(t)}.$$

Portant ces expressions dans (3) et substituant ensuite des fonctions elliptiques, j'ai

$$x = \frac{d}{dt}(\log \operatorname{sn} t - \log \operatorname{cn} t) = \frac{\operatorname{dn} t}{\operatorname{sn} t \operatorname{cn} t},$$

$$y = -\frac{d}{dt}(\log \operatorname{cn} t) = \frac{\operatorname{sn} t \operatorname{dn} t}{\operatorname{cn} t},$$

d'où résulte

$$xy(x-y) = x - k^2 y,$$

équation dans laquelle k désigne le module des fonctions elliptiques, savoir

$$k = \left(\frac{2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + \ldots}\right)^2.$$

Je rends maintenant l'équation de la courbe homogène, par l'introduction d'une coordonnée z. Elle devient

$$xy(x-y) = z^2(x - k^2 y).$$

Il est visible que l'équation d'une cubique se réduit à pareille forme quand on prend un triangle de référence convenable, savoir le sommet $x = 0$, $y = 0$ en un point d'inflexion, et les deux autres aux points de contact de deux des tangentes que l'on peut mener à la courbe par ce point d'inflexion. Un pareil triangle existe toujours si la courbe est de sixième classe, et dans ce cas seulement; donc toute cubique de sixième classe peut être représentée par les équations (3), où x, y sont le rapport de deux trinômes du premier degré à un autre pareil trinôme, et enfin, suivant la remarque du n° **1**, *toute cubique de sixième classe peut être représentée par les équations* (1).

4. Au lieu de considérer, comme au n° **1**, une fonction linéaire de x et y, envisageons une fonction du troisième degré; c'est une fonction doublement périodique, dont les infinis α, β, γ sont triples. Le théorème de M. Liouville conduit alors à ces conséquences :

La somme des arguments qui répondent aux neuf points d'intersection de la cubique (1) *avec une autre cubique ne diffère de* $3(\alpha + \beta + \gamma)$ *que par des multiples des périodes.*

Si, en un point d'argument t, on mène le faisceau des cubiques ayant *avec la courbe* (1), *en ce point, des contacts du septième ordre, toutes ces cubiques passent aussi au point dont l'argument est* $3(\alpha+\beta+\gamma)-8t$.

En chacun des points dont l'argument est compris dans la formule

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}+\frac{2pK+2p'iK'}{9},$$

il existe un faisceau de cubiques ayant avec la cubique (1) *des contacts du huitième ordre en ce point. Chacun de ces points est un point de coïncidence.*

Voici donc prouvée l'existence, sur les cubiques, des *points de coïncidence*. Leur nombre est seulement 72; car les valeurs de p, p' multiples de 3, prises simultanément, conduiraient aux points d'inflexion. Dans un Mémoire antérieur, j'étais déjà parvenu à trouver par une voie très-différente ce même résultat ([1]).

Si, conformément au second corollaire du n° 3, on calcule l'argument du point où la cubique (1) est rencontrée de nouveau par la tangente en un point de coïncidence, on vérifie sans peine que ce nouveau point est aussi un point de coïncidence, et l'on trouve cette nouvelle propriété :

Sur une cubique, les points de coïncidence forment, par groupes de trois, les sommets de triangles à la fois inscrits et circonscrits à la courbe ([2]).

5. Voici maintenant une nouvelle propriété des points de coïncidence, qui, s'appliquant à une courbe quelconque, va permettre de former l'équation qui caractérise ces points.

Soient U, V les premiers membres des équations de deux cubiques ayant en m un contact du huitième ordre. Parmi les cubiques du fais-

---

([1]) *Journal de Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 376.

([2]) M. Picquet a, de son côté, trouvé cette curieuse propriété, et l'a communiquée verbalement à la Société mathématique dans la séance du 9 janvier 1878. M. Mannheim a donné, au sujet des triangles inscrits et circonscrits à une cubique ou à une courbe de troisième classe, deux théorèmes remarquables. (*Voir* Poncelet, *Applications d'Analyse et de Géométrie*, t. II, p. 165; et *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. II, p. 198.) M. Clebsch les a considérés dans un cas particulier. (*Voir* Lindemann, *Vorlesungen von Clebsch*, p. 588); M. Appell a, de son côté, étudié les polygones à la fois inscrits et circonscrits aux courbes du troisième degré, dans un Mémoire inédit, que M. Bouquet a bien voulu me communiquer.

ceau $U + \lambda V$, il en est une W douée d'un point double en m. L'une des branches de W a, en m, un contact du septième ordre avec chaque cubique du faisceau.

Réciproquement, soit W une cubique ayant un point double m, et soit aussi U une cubique quelconque ayant, en m, un contact du septième ordre avec une des branches de W. Les neuf points d'intersection de U et d'une cubique quelconque du faisceau $U + \lambda W$ sont confondus en m; donc, sur U, m est un point de coïncidence; donc :

En un point de coïncidence m d'une courbe quelconque, il existe une cubique ayant m pour point double, et dont une des branches a avec la courbe, en ce point, un contact du septième ordre. Et réciproquement.

6. Soient x, y les coordonnées d'un point m. Désignant par α une constante ne dépendant que du point m, et que je préciserai tout à l'heure, je représente les coordonnées d'un autre point quelconque m' par $x + \xi$ et $y + \eta + \alpha\xi$. Le premier membre de l'équation d'une cubique ayant m pour point double, et lieu du point m', est de la forme

$$W = A\xi^2 + B\xi^3 + C\xi\eta + D\xi^2\eta + E\eta^2 + F\xi\eta^2 + G\eta^3. \tag{4}$$

Soit maintenant une courbe (m), dont m soit un point de coïncidence, et soit W la cubique dont une des branches en m a, avec (m), un contact du septième ordre. Neuf intersections des deux courbes sont confondues en m. Si donc m', au lieu d'être sur W, est pris sur (m) à une distance infiniment petite du premier ordre de m, W doit se réduire au neuvième ordre. On exprimera donc que m est, sur (m), un point de coïncidence, en substituant dans W à l'ordonnée de m' son développement suivant les puissances ascendantes de l'accroissement de son abscisse, et en annulant tous les termes jusqu'au huitième ordre inclusivement. Le premier terme étant du deuxième ordre, on aura ainsi sept équations linéaires et homogènes entre les sept coefficients de W. L'élimination de ces coefficients conduira à l'équation cherchée.

Pour abréger l'écriture, je pose

$$\frac{1}{1.2.3\ldots k}\frac{d^k y}{dx^k} = a_k.$$

Je fais, en outre, $\alpha = a_1$. De la sorte, suivant la série de Taylor, on a

$$\eta = a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 + a_5\xi^5 + a_6\xi^6 + a_7\xi^7 + \ldots,$$

Je substitue cette expression de η dans celle de W, en ordonnant suivant les puissances croissantes de ξ, et j'égale à zéro successivement chaque coefficient. Le terme $A\xi^2$ étant seul du deuxième ordre, A est nul. Secondement, le coefficient B ne figure que dans le terme du troisième ordre. Laissant de côté ce terme, j'élimine ainsi B. L'équation de condition a donc pour premier membre le déterminant des coefficients des termes depuis le quatrième ordre jusqu'au huitième. J'ai successivement

$$\begin{aligned}
\xi\eta &= \ldots\ a_2\xi^3 + a_3\xi^4 + a_4\xi^5 + a_5\xi^6 + a_6\xi^7 + a_7\xi^8 + \ldots,\\
\xi^2\eta &= \ldots\ldots\ a_2\xi^4 + a_3\xi^5 + a_4\xi^6 + a_5\xi^7 + a_6\xi^8 + \ldots,\\
\eta^2 &= \ldots\ldots\ a_2^2\xi^4 + 2a_2a_3\xi^5 + \left.\begin{matrix}2a_2a_4\\ +a_3^2\end{matrix}\right|\xi^6 + \left.\begin{matrix}2a_2a_5\\ +2a_3a_4\end{matrix}\right|\xi^7 + \left.\begin{matrix}2a_2a_6\\ +2a_3a_5\\ +a_4^2\end{matrix}\right|\xi^8 + \ldots,\\
\xi^2\eta &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ a_2^2\xi^5 + 2a_2a_3\xi^6 + \left.\begin{matrix}2a_2a_4\\ +a_3^2\end{matrix}\right|\xi^7 + \left.\begin{matrix}2a_2a_5\\ +2a_3a_4\end{matrix}\right|\xi^8 + \ldots,\\
\eta^3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ a_2^3\xi^6 + 3a_2^2a_3\xi^7 + \left.\begin{matrix}3a_2a_3^2\\ +3a_2^2a_4\end{matrix}\right|\xi^8 + \ldots,
\end{aligned}$$

Le déterminant est formé par les coefficients de ces équations. On remarquera que, dans la dernière ligne, a_2 se trouve en facteur et doit être supprimé. Cette circonstance est d'accord avec ce fait, déjà remarqué d'ailleurs (n^o 4), que les points d'inflexion se présentent, comme solution étrangère, dans la recherche des points de coïncidence. En second lieu, on simplifie un peu le déterminant en remplaçant la ligne correspondant à η^2 par celle qui correspondrait à la combinaison $(\eta^2 - 2a_2\xi^2\eta)$. On peut donc écrire comme il suit le déterminant cherché :

$$\Delta = \begin{vmatrix}
a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7\\
a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6\\
-a_2^2 & 0 & a_3^2 & 2a_3a_4 & 2a_3a_5 + a_4^2\\
0 & a_2^2 & 2a_2a_3 & 2a_2a_4 + a_3^2 & 2a_2a_5 + 2a_3a_4\\
0 & 0 & a_2^2 & 3a_2a_3 & 3a_3^2 + 3a_2a_4
\end{vmatrix}.$$

7. Il y a lieu de faire une observation au sujet de l'équation $\Delta = 0$. En chaque point d'une courbe il existe une cubique ayant, en ce point, avec la courbe un contact du huitième ordre, disons une cubique *osculatrice*. Que devient cette cubique en un point pour lequel l'équation $\Delta = 0$ est satisfaite? Soit U le premier membre de l'équation de cette cubique. Avec les notations précédentes, on peut l'écrire

$$U = H\xi + J\eta + W_1,$$

et W_1 désigne une expression de la même forme que W, mais à coefficients encore inconnus. Ces coefficients, ainsi que H et J, se déterminent par la condition qu'après la même substitution que ci-dessus tous les termes disparaissent jusqu'au huitième ordre, comme précédemment. On voit d'abord que H est nul; secondement, J et les coefficients de W_1 sont proportionnels aux déterminants formés avec le même tableau que ci-dessus, complété par une ligne, le développement de η. Pour obtenir J, c'est cette ligne qu'il faut supprimer; donc, si Δ est nul, J l'est aussi; donc U coïncide avec W. Ainsi :

En un point de coïncidence d'une courbe, la cubique osculatrice de cette courbe y possède un point double.

Circonstance curieuse : il n'y a plus en un pareil point de branche de cubique se confondant avec la courbe jusqu'au huitième ordre inclusivement, comme cela arrive en tout autre point. Cette circonstance se présentera pour chaque point des courbes intégrales de l'équation $\Delta = 0$.

En utilisant un résultat acquis dans un Mémoire déjà cité (¹), on déduit de la composition de Δ, et sans aucun calcul, cette conséquence : *Les points de coïncidence d'une courbe de degré m sont les intersections de cette courbe et d'une autre dont le degré est* $(32m - 72)$.

II. — *Intégration de l'équation différentielle des points de coïncidence.*

8. L'équation $\Delta = 0$ est du septième ordre. Elle ne contient ni x, ni y, ni y'. Elle pourrait donc être abaissée au quatrième ordre. L'inté-

---

(¹) *Journal de Mathématiques*, 3ᵉ série, t. II.

gration directe en paraît cependant trop malaisée pour être entreprise; aussi vais-je y substituer un système d'équations du premier ordre déduit des considérations précédentes.

Soit (m) la courbe dont l'intégrale de $\Delta = 0$ fournit l'équation. D'après le n° 6, en chaque point m de (m) il existe une cubique W dont m est point double, et dont une branche a, en m, un contact du septième ordre avec (m). Les coefficients de l'équation de W varient avec m; je les supposerai des fonctions d'un même paramètre, et je chercherai à déterminer ces fonctions de telle sorte que l'enveloppe de W ait constamment avec une des branches de l'enveloppée, en son point double, un contact du septième ordre. Cela fait, la courbe (m) sera cette enveloppe.

Désignons par W′ la dérivée du premier membre de l'équation de W, prise par rapport au paramètre; je dis que les conditions du problème s'expriment ainsi : *Les deux cubiques* W et W′ (c'est-à-dire celles dont l'équation est $W' = 0$) *ont leurs neuf points d'intersection confondus en m.*

Soit, en effet, W_1 la cubique répondant à m_1, infiniment voisin de m. Une branche de W en m, une branche de W_1 en m_1 ont, avec (m), des contacts du septième ordre. Ces deux branches ont donc entre elles sept intersections infiniment voisines de m. En outre, la seconde branche de W et la première de W_1 ont entre elles une intersection infiniment voisine de m, et de même la seconde branche de W_1 et la première de W; donc les neuf points d'intersection de W et de W_1 sont infiniment voisins de m; donc les neuf points communs à W et à W′ sont en m.

On peut encore raisonner ainsi : la quantité W, sous la forme (4) et développée suivant les puissances de ξ, commence, comme on l'a vu, par un terme du neuvième ordre. A la place de ξ mettons $(x_1 - x)$ pour introduire l'abscisse x_1 du point m_1. On a donc

$$W = \alpha(x_1 - x)^9 + \ldots,$$

$$\frac{dW}{dx} = -9\alpha(x_1 - x)^8 + \frac{d\alpha}{dx}(x_1 - x)^9 + \ldots = -9\alpha\xi^8 + \ldots;$$

donc la cubique dont l'équation est $\frac{dW}{dx} = 0$, x_1 et y_1 étant les coordonnées courantes, à huit intersections avec (m), réunies en m. D'ailleurs on verra dans un instant qu'elle ne peut avoir m pour point double : donc elle a un contact du septième ordre avec (m), et, par suite aussi, avec une des branches de W ; par suite, ses neuf intersections avec W sont réunies en m.

9. En désignant par A, A_1, A_2 les premiers membres des équations de trois droites, on peut réduire, comme on sait, l'équation d'une cubique ayant les droites A et A_1 pour tangentes au point double à la forme

$$0 = W = 4A^3 + 5A_1^2 - 10AA_1A_2, \tag{5}$$

dans laquelle les coefficients numériques, qui sont à volonté, ont été choisis de manière à simplifier le résultat définitif. Je poserai

$$A = ax + by + c, \quad A_1 = a_1x + b_1y + c_1, \quad A_2 = a_2x + b_2y + c_2.$$

Les inconnues seront les neuf quantités $a, b, \ldots, c_2$, ou plutôt leurs rapports. Je dénoterai par des accents leurs dérivées par rapport au paramètre, que je laisse, pour le moment, indéterminé, et de même par A', A'_1, A'_2 les quantités $(a'x + b'y + c'), \ldots$.

De (5) je déduis

$$W' = A'(12A^2 - 10A_1A_2) + A'_1(15A_1^2 - 10AA_2) - 10A'_2AA_1. \tag{6}$$

L'une des droites A ou A_1 doit être tangente à l'enveloppe de W au point double. Je supposerai que ce soit A. La droite $A' = 0$ doit alors passer par ce point, intersection de A_1, A. Il en résulte que la cubique $W' = 0$ ne peut avoir ce point pour point double, ainsi que je l'ai dit tout à l'heure. Pour qu'il en fût ainsi, il faudrait, en effet, que la droite $A'_1 = 0$ passât aussi en ce point, ce qui ne peut avoir lieu constamment, les droites A et A_1 ayant nécessairement des enveloppes distinctes.

10. La courbe (5) étant unicursale, j'exprime les coordonnées d'un quelconque de ses points en fonction rationnelle d'un paramètre, savoir

$$\frac{A}{10t^2} = \frac{A_1}{10t} = \frac{A_2}{4t^3 + 5}.$$

Les valeurs o et ∞ de ce paramètre t correspondent aux branches du point double, la première à la branche qui touche A. Je formerai l'équation en t qui donne les points communs à W et W'. Comme W' passe en m, cette équation a déjà une racine nulle et une racine infinie, et se réduit au septième degré. On devra annuler les sept racines qui subsistent, et, à cet effet, égaler à zéro successivement les coefficients des divers termes, sauf le terme du septième degré.

Pour former l'équation en t, il faut exprimer A', A'_1, A'_2 en fonction de A, A_1, A_2 sous forme homogène, et substituer ensuite à ces dernières quantités les valeurs proportionnelles ci-dessus. Or on a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} A'_i = - \begin{vmatrix} 0 & a'_i & b'_i & c'_i \\ A & a & b & c \\ A_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ A_2 & a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Substituant cette expression des A', je mets W', sauf un facteur, sous la forme d'un déterminant dont j'écris seulement les deux premières colonnes, les deux dernières se déduisant de la deuxième par le changement des a successivement en b et c :

$$W' = \begin{vmatrix} 0 & a'(12A^2 - 10A_1A_2) + a'_1(15A_1^2 - 10A_2A) - 10a'_2AA_1 & \dots \\ A & a & \dots \\ A_1 & a_1 & \dots \\ A_2 & a_2 & \dots \end{vmatrix}.$$

Substituant aux A les valeurs proportionnelles, et supprimant à la première ligne un facteur commun $100t$, j'obtiens finalement

$$W' = \begin{vmatrix} 0 & a'(8t^3 - 5) + 2a'_1t(5 - 2t^3) - 10a'_2t^3, & \dots \\ 10t^2 & a & \dots \\ 10t & a_1 & \dots \\ 4t^3 + 5 & a_2 & \dots \end{vmatrix}.$$

11. Tel est le premier membre de l'équation en t. Je forme d'abord les coefficients des termes de degrés 0, 6, 3. J'emploie la notation abrégée

$$(a'bc_1) = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

Les termes susdits, égalés à zéro, donnent successivement les trois équations

$$(7) \qquad (a'bc_1) = (a'_1 b_1 c_2) = (a'_2 b_2 c) = 0.$$

Ces équations expriment une propriété du déplacement du triangle AA_1A_2 : *chaque sommet du triangle a pour lieu l'enveloppe d'un des côtés qui y aboutissent.*

Les termes de degré 1 et 4 conduisent à

$$(8) \qquad (a'bc_2) = (a'_1 b_1 c) = (a'_2 b_2 c_1);$$

et ceux de degré 2 et 5 aux équations

$$(9) \qquad (a' b_1 c_2) = (a'_1 b_2 c) = (a'_2 b c_1).$$

Les équations (7), (8), (9) constituent le système à intégrer. On y remarquera qu'il n'est pas altéré par une permutation circulaire des indices; donc : *chaque sommet du triangle décrit en même temps une courbe intégrale de l'équation* $\Delta = 0$.

12. Les équations (7) peuvent être remplacées par les suivantes, où $\mu_1, \ldots, \nu_2$ sont de nouvelles inconnues :

$$\begin{aligned}
a &= \nu a_2 + \mu a'_2, & b &= \nu b_2 + \mu b'_2, & c &= \nu c_2 + \mu c'_1, \\
a_1 &= \nu_1 a + \mu_1 a', & b_1 &= \nu_1 b + \mu_1 b', & c_1 &= \nu_1 c + \mu_1 c', \\
a_2 &= \nu_2 a_1 + \mu_2 a'_{12}, & b_2 &= \nu_2 b_1 + \mu_2 b'_1, & c_2 &= \nu_2 c_1 + \mu_2 c'_1.
\end{aligned}$$

En vertu de ces nouvelles expressions, les équations (8) et (9) se transforment ainsi :

$$\frac{1}{\mu_1}(a_1 bc_2) = \frac{1}{\mu_2}(a_2 b_1 c) = \frac{1}{\mu}(ab_2 c_1),$$

$$\frac{\nu_1}{\mu_1}(ab_1 c_2) = \frac{\nu_2}{\mu_2}(a_1 b_2 c) = \frac{\nu}{\mu}(a_2 bc_1).$$

L'hypothèse $(ab_1c_2) = 0$ doit être écartée, car elle exprime que les droites A, A_1, A_2 concourent en un même point, auquel cas la cubique W n'existe plus. Il reste donc

$$\mu = \mu_1 = \mu_2, \qquad \nu = \nu_1 = \nu_2.$$

On a donc le système

$$a = \nu a_2 + \mu a'_2, \quad a_1 = \nu a + \mu a', \quad a_2 = \nu a_1 + \mu a'_1,$$

et deux autres systèmes de tout point semblables pour les b et les c. Sans restreindre la généralité, on peut prendre ν à volonté; car, si l'on remplace a, a_1, a_2 par $\nu\alpha, \nu\alpha_1, \nu\alpha_2$, le dernier système devient

$$\alpha = \left(\nu + \mu\frac{\nu'}{\nu}\right)\alpha_2 + \mu\alpha'_2, \quad \ldots,$$

et l'on peut y choisir ν de manière à donner au coefficient de α_2 une valeur arbitraire. On a ainsi multiplié les a et de même les b et les c par une même quantité ν, ce qui n'altère pas le résultat. En conséquence, je fais $\nu = 0$. J'ai ainsi le système simple :

(10) $$a = \mu a'_2, \quad a_1 = \mu a', \quad a_2 = \mu a'_1.$$

La variable indépendante a été laissée arbitraire. Je la fixe maintenant, en prenant μ pour cette variable. L'intégrale du système est alors évidente. Si θ et θ_1 sont les racines cubiques imaginaires de l'unité, et K, K′, K″ des constantes arbitraires, ce sera

$$\begin{aligned} a &= K\mu + K'\mu^{\theta} + K''\mu^{\theta_1}, \\ a_1 &= K\mu + \theta K'\mu^{\theta} + \theta_1 K''\mu^{\theta_1}, \\ a_2 &= K\mu + \theta_1 K'\mu^{\theta} + \theta K''\mu^{\theta_1}. \end{aligned}$$

Les b et les c auront des expressions toutes pareilles, qui ne différeront que par les constantes arbitraires; d'où résulte que :

La courbe intégrale de l'équation $\Delta = 0$ est l'enveloppe de la droite mobile :

$$A = 0 = (Kx + Ly + M)\mu + (K'x + L'y + M')\mu^{\theta} + (K''x + L''y + M'')\mu^{\theta_1}.$$

K, L, ..., M″ *sont des constantes arbitraires,* θ, θ_1 *les racines cubiques imaginaires de l'unité, et* μ *le paramètre variable.*

13. Soient α, β, γ les trois trinômes qui figurent dans A. On a, pour l'équation de chacune des trois droites A, A_1, A_2,

$$\begin{aligned} 0 = A &= \mu\alpha + \mu^{\theta}\beta + \mu^{\theta_1}\gamma, \\ 0 = A_1 &= \mu\alpha + \theta\mu^{\theta}\beta + \theta_1\mu^{\theta_1}\gamma, \\ 0 = A_2 &= \mu\alpha + \theta_1\mu^{\theta}\beta + \theta\mu^{\theta_1}\gamma. \end{aligned}$$

Le point où A touche son enveloppe est donné par

$$(11) \qquad \frac{\alpha}{(\theta_1 - \theta)\mu^{-2}} = \frac{\beta}{(1 - \theta_1)\mu^{\theta_1}} = \frac{\gamma}{(\theta - 1)\mu^{\theta}},$$

et il en résulte l'équation de la courbe intégrale

$$\alpha^{\theta_1 - \theta} \beta^{\theta + 2} \gamma^{-(\theta_1 + 2)} = \text{const.}$$

En remplaçant θ par $-\lambda$, cette équation se transforme aisément en la suivante :

$$\alpha \beta^{-\lambda} \gamma^{\lambda - 1} = \text{const.}$$

Telle est, en désignant par α, β, γ *trois trinômes arbitraires du premier degré et par* λ *une racine de* $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, *l'intégrale générale de* $\Delta = 0$.

Cette courbe est une de celles que l'on rencontre dans l'intégration d'une équation du premier ordre, connue sous le nom d'*équation de Jacobi*. MM. Klein et Lie et M. Fouret ont eu l'occasion de montrer que ces courbes sont des transformées homographiques de spirales logarithmiques (¹). Cette transformation s'opère aisément ainsi. Posons

$$\mu^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = e^{\omega}, \qquad \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\beta}{1 - \theta_1} + \frac{\gamma}{\theta - 1}\right) = \text{X}, \qquad \frac{1}{2\alpha\sqrt{-1}}\left(\frac{\beta}{1 - \theta_1} - \frac{\gamma}{\theta - 1}\right) = \text{Y}.$$

Les équations (11) deviennent alors

$$\text{X} = e^{\omega\sqrt{3}} \cos\omega, \qquad \text{Y} = e^{\omega\sqrt{3}} \sin\omega, \qquad \text{X}^2 + \text{Y}^2 = e^{2\omega\sqrt{3}}.$$

Si X, Y sont des coordonnées rectangles, ces dernières équations sont celles d'une spirale logarithmique ayant pour paramètre $\sqrt{3}$; d'où cette conclusion finale :

Les courbes intégrales de l'équation $\Delta = 0$ *sont des transformées homographiques quelconques de la spirale logarithmique qui coupe ses rayons sur l'angle de* 30 *degrés.*

Si l'on prend pour intégrale cette spirale elle-même, on peut préciser les propriétés du déplacement du triangle AA_1A_2. Ce triangle est

---

(¹) *Mathematische Annalen*, t. IV, p. 50; *Comptes rendus*, t. LXXVIII, p. 1837.

équilatéral et a pour centre le pôle de la spirale. Chaque sommet a pour lieu une spirale égale à celle que décrit l'un d'eux. Les trois spirales, dont chacune se déduit de la précédente en la faisant tourner de 120 degrés autour du pôle, sont en même temps les enveloppes des côtés du triangle. Enfin la cubique W reste constamment semblable à elle-même.

En vertu des relations analogues à (10), l'équation de la cubique W' se réduit à

$$o = W' = 2A^2A_1 + 5A_1^2A_2 - 10A_2^2A.$$

Sous cette forme, il est manifeste que cette cubique est inscrite et circonscrite au triangle AA_1A_2, ce qui fournit une vérification (n° 4). Enfin il est aisé de voir que W' est une cubique *équianharmonique*. On peut donc résumer les propriétés géométriques de la figure dans cet énoncé :

Étant donnée une spirale logarithmique de 30 *degrés, si l'on construit le triangle équilatéral qui a pour centre le pôle de cette spirale et pour sommet un point quelconque de cette courbe, ce triangle est inscrit et circonscrit à une cubique équianharmonique, qui a un contact du septième ordre avec la spirale au point considéré.*

III. — *Théorie des invariants différentiels jusqu'au huitième ordre exclusivement.*

14. La forme de l'intégrale qui vient d'être trouvée pour l'équation $\Delta = o$ pouvait être prévue comme conséquence des propriétés générales des invariants différentiels. C'est ce dont on se convaincra dans un instant, quand j'aurai rappelé ces propriétés, que j'ai déjà eu l'occasion de mettre en évidence dans un Mémoire cité ci-dessus, et que je vais démontrer ici d'une manière très-simple.

Soient X et Y une variable indépendante et une fonction de cette variable; et x, y une nouvelle variable et une nouvelle fonction, liées aux précédentes par les relations

$$(12) \quad \begin{cases} X = \dfrac{\xi}{\zeta}, \quad Y = \dfrac{\eta}{\zeta}, \\ \xi = ax + by + c, \quad \eta = a'x + b'y + c', \quad \zeta = a''x + b''y + c''. \end{cases}$$

Soit Φ une fonction entière par rapport à tous ses arguments,

$$\Phi = f\left(X, Y, \frac{dY}{dX}, \ldots, \frac{d^nY}{dX^n}\right).$$

Si, en vertu du changement de variables indiqué, l'équation $\Phi = 0$ a pour transformée

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

la fonction Φ sera dite un *invariant différentiel*.

Dénotons par des accents les dérivées prises par rapport à x, et par D le déterminant des coefficients de ξ, η, ζ. On a, pour le changement de variables, les formules

$$(13)\quad \frac{dY}{dX} = \frac{\zeta\eta' - \eta\zeta'}{\zeta\xi' - \xi\zeta'}, \quad \frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{D\zeta^3 y''}{(\zeta\xi' - \xi\zeta')^3}, \quad \frac{d^kY}{dX^k} = \frac{D\zeta^{2k-1} y^{(k)}}{(\zeta\xi' - \xi\zeta')^{k+1}} + \frac{\zeta^{k+1} A}{(\zeta\xi' - \xi\zeta')^{2k-1}},$$

dans la dernière desquelles, où k est au moins égal à 2, A désigne une fonction entière de x, y et des dérivées de y jusqu'à l'ordre $(k-1)$ au plus.

De ces formules, je vais déduire les propriétés générales les plus simples des invariants différentiels, et, à cet effet, j'envisage tout d'abord et successivement trois cas particuliers de la substitution (12), savoir :

1° $\qquad X = x + c, \quad Y = y;$

2° $\qquad X = x, \quad Y = y + c';$

3° $\qquad X = x, \quad Y = a'x + y.$

Les deux premières mettent en évidence que, si Φ est un invariant, la fonction f ne contient ni X, ni Y ; car chacune de ces substitutions altère une seule de ces deux lettres sans altérer aucune des autres. Ce résultat acquis, on voit que la troisième substitution n'altère que $\frac{dY}{dX}$, puisque Y ne figure pas dans f; donc, de même, cette dérivée ne peut figurer dans f. Ainsi :

THÉORÈME I. — *Un invariant différentiel ne contient ni la variable indépendante, ni la fonction, ni sa dérivée première.*

Dans Φ ordonnons les termes eu égard à leur degré par rapport à la lettre Y, abstraction faite des indices de dérivation. Marquons ce degré par un indice, et soit ainsi

$$\Phi = \Phi_\delta + \Phi_\lambda + \Phi_\mu + \ldots.$$

Envisageons maintenant la substitution $X = x$, $Y = b'y$. La fonction Φ se change en

$$b'^\delta \varphi_\delta + b'^\lambda \varphi_\lambda + b'^\mu \varphi_\mu + \ldots,$$

où chaque expression φ_δ ne diffère de la correspondante Φ_δ que par le changement des lettres.

Si Φ est un invariant différentiel, les deux équations

$$b'^\delta \varphi_\delta + b'^\lambda \varphi_\lambda + b'^\mu \varphi_\mu + \ldots = 0, \quad \varphi_\delta + \varphi_\lambda + \varphi_\mu + \ldots = 0$$

doivent être équivalentes. Cela exige qu'il n'existe qu'un seul groupe de lettres φ_δ; donc :

Théorème II. — *Le degré d'un terme quelconque d'un invariant différentiel par rapport à la lettre y, abstraction faite des indices de dérivation, est constant pour tous les termes de cet invariant.*

Ce degré sera dit le *degré* de l'invariant.

Par un raisonnement semblable, et en considérant la substitution $X = ax$, $Y = ay$, on obtient cet autre résultat :

Théorème III. — *La somme des indices de dérivation dans un terme quelconque d'un invariant différentiel est la même pour tous les termes.*

Cette somme constante sera dite le *poids* de l'invariant.

15. Soit maintenant une fonction Φ satisfaisant aux conditions des théorèmes I, II, III, c'est-à-dire ne contenant ni X, ni Y, ni la dérivée première de Y, dont tous les termes aient, en outre, un même *degré* δ et un même *poids* p. Je lui applique la substitution (12) dans toute sa généralité. En vertu des formules (13), elle devient

$$\Phi = \frac{D^\delta \zeta^{2p-\delta}}{(\zeta\xi' - \xi\zeta')^{p+\delta}} \varphi + \frac{\zeta^a}{(\zeta\xi' - \xi\zeta')^\beta} \psi.$$

Ici φ désigne la même fonction que Φ, sauf le changement des lettres, et ψ une fonction entière de x, y et des dérivées de y, mais d'ordre moindre que n. Si maintenant Φ est un invariant, l'équation obtenue en égalant cette expression à zéro doit, par définition, être équivalente à $\varphi = 0$. Puisque ψ est d'ordre inférieur à celui de φ, il en résulte que ψ est identiquement zéro; donc :

THÉORÈME IV. — *Appliquée à un invariant différentiel de degré δ et de poids p, la substitution homographique générale* (12) *a pour effet de le reproduire multiplié par le facteur*

$$D^{\delta}\zeta^{2p-\delta}(\zeta\xi' - \xi\zeta')^{-(p+\delta)},$$

dans lequel D *est le déterminant de la substitution.*

COROLLAIRES. — 1° *La somme de deux invariants différentiels du même degré et du même poids est encore un invariant;* 2° *réciproquement, si un invariant différentiel est la somme de deux autres, ces derniers sont de même degré et de même poids;* 3° *le quotient de deux invariants de même degré et de même poids est un invariant* absolu.

16. Une autre conséquence est encore à tirer de cette analyse. Considérons dans un invariant Φ les termes qui contiennent au plus haut degré la dérivée de l'ordre le plus élevé n; réunissons-les en un seul, et soit Ψ le coefficient de cette dérivée élevée à cette puissance. Soit maintenant ψ ce que devient Ψ après la substitution générale (12). Il est manifeste qu'aux facteurs D, ζ, $(\zeta\xi' - \xi\zeta')$ près, ψ est le coefficient de la même puissance de la dérivée d'ordre le plus élevé dans l'invariant transformé φ; donc, à ces facteurs près, ψ ne diffère de Ψ que par le changement des lettres. Donc Ψ est lui-même un invariant. Ainsi :

THÉORÈME V. — *Dans un invariant différentiel, le coefficient de la plus haute puissance de la dérivée de l'ordre le plus élevé est lui-même un invariant différentiel.*

De cette dernière proposition résulte comme corollaire la suivante, qui donne la clef de cette théorie :

THÉORÈME VI. — *Soient Φ et Ψ deux invariants différentiels du même ordre n, et dont le second soit linéaire par rapport à la dérivée d'ordre n :*

il existe un invariant d'ordre inférieur à n, tel que son produit par Φ soit une fonction entière de Ψ et d'invariants d'ordre moindre que n.

Soit z la dérivée d'ordre n, entrant dans Φ au degré m; posons

$$\Phi = Az^m + B, \quad \Psi = Cz + E.$$

D'après le théorème V, A et C sont des invariants d'ordre moindre que n; donc aussi $C^m\Phi$ et $A\Psi^m$ sont aussi des invariants, d'ailleurs d'un même degré et d'un même poids. Leur différence (th. IV, coroll.) est donc aussi un invariant. Soit Φ_1 cette différence. Elle ne contient z qu'à un degré moindre que m. On lui appliquera le même raisonnement et l'on continuera jusqu'à faire disparaître z. On aura finalement l'identité

$$C^k\Phi = F\Psi^m + F_1\Psi^{m-1} + \ldots + F_{m-1}\Psi + F_m,$$

dans laquelle les C et les F sont tous des invariants d'ordre moindre que n; c'est ce qu'il fallait démontrer.

17. Telles sont les propositions générales sur lesquelles se fonde toute la théorie qui va suivre. J'arrive maintenant à ce qui concerne en particulier les invariants différentiels jusqu'au septième ordre inclusivement, dont on va voir immédiatement le caractère distinctif.

Soient, comme précédemment, δ et p le degré et le poids d'un invariant Φ. J'y remplace Y par X^λ. Chaque terme prend alors la forme $F(\lambda)X^{\delta\lambda-p}$, F étant un polynôme entier. Le second facteur est commun à tous les termes. A ce facteur près, Φ se réduit à un polynôme entier $\Phi(\lambda)$. Si donc λ est une racine de ce polynôme, $Y = X^\lambda$ est une intégrale de l'équation $\Phi = 0$. Faisons maintenant la substitution (12) dans l'intégrale et dans l'équation différentielle. Cette dernière n'est pas changée et est, par suite, indépendante des constantes de (12); donc :

Toute équation différentielle dont le premier membre est un invariant admet une ou plusieurs intégrales de la forme

$$(14) \qquad ax + by + c = (a'x + b'y + c')^\lambda (a''x + b''y + c'')^{1-\lambda},$$

où $a, b, \ldots, c''$ sont des constantes arbitraires.

Ces constantes sont au nombre de sept seulement; car on peut, par exemple, supposer $a = a' = 1$ sans restreindre la généralité. Donc :

Toute équation différentielle dont le premier membre est un invariant et dont l'ordre ne surpasse pas sept, a pour intégrale générale l'équation (14), *où* λ *a une valeur convenablement choisie.*

Cette proposition ne pourrait subir d'exception qu'au cas où λ aurait une telle valeur que l'équation (14) contînt moins de sept constantes arbitraires. Examinons donc ces cas particuliers.

18. J'observe d'abord qu'une même intégrale de la forme (14) répond à plusieurs valeurs différentes de λ. En effet, en désignant par α, β, γ les trois trinômes, on peut écrire l'équation (14) sous les diverses formes

$$\alpha\beta^{-\lambda}\gamma^{\lambda-1} = 1, \quad \alpha^{-\frac{1}{\lambda}}\beta\gamma^{\frac{1}{\lambda}-1} = 1, \quad \alpha^{\frac{1}{\lambda-1}}\beta\gamma^{-\frac{\lambda}{\lambda-1}} = 1;$$

d'où résulte qu'une même intégrale (14) répond à six valeurs de λ, savoir

$$(15) \qquad \lambda, \ \frac{1}{\lambda}, \ 1-\lambda, \ \frac{1}{1-\lambda}, \ \frac{\lambda}{\lambda-1}, \ \frac{\lambda-1}{\lambda}.$$

Ces six valeurs forment un système fermé, le même que celui des six expressions du rapport anharmonique de quatre points. Si λ est négatif, $(1-\lambda)$ sera positif; donc on peut, sans restreindre la généralité, supposer λ positif; puis, s'il est plus grand que l'unité, son inverse sera plus petit; donc on peut aussi le supposer plus petit que l'unité. Ainsi, sans restreindre la généralité, je peux, pour cette discussion, supposer λ compris entre zéro et l'unité.

En premier lieu, si λ est incommensurable, les trois sommets du triangle formé par les droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ sont trois points singuliers transcendants de la courbe (14). La détermination de ce triangle exige six constantes effectives. Ce triangle donné, l'équation contient encore une constante nécessaire à la détermination de la courbe; donc, si λ est incommensurable, l'équation (14) contient effectivement sept constantes.

En second lieu, si λ est commensurable, je le suppose égal à la fraction positive, plus petite que l'unité et irréductible $p : q$. L'équation (14) devient alors

$$\alpha^q = \beta^p\gamma^{q-p},$$

et tous les exposants sont entiers et positifs. C'est l'équation d'une courbe de degré q présentant deux points singuliers : 1° le point $\beta = \alpha = 0$, en lequel l'ordre de multiplicité est égal à p et l'ordre du contact de chaque branche avec la tangente commune $\beta = 0$, est $\frac{q-p}{p}$; 2° le point $\gamma = \alpha = 0$, en lequel l'ordre de multiplicité est $(q-p)$ et l'ordre du contact de chaque branche avec la tangente $\gamma = 0$, est $\frac{p}{q-p}$. Or les deux nombres $\frac{q-p}{p}$ et $\frac{p}{q-p}$ sont tous deux différents de l'unité, sauf au cas où $p = 1$, $q = 2$; donc, hormis ce cas, les deux points sont effectivement singuliers : le triangle est alors entièrement particularisé relativement à la courbe, et les conclusions sont les mêmes que si λ est incommensurable.

Au cas $p = 1$, $q = 2$ correspond pour la courbe une conique, relativement à laquelle le triangle peut être effectivement choisi d'une infinité de manières : on peut prendre α à volonté.

Enfin cette analyse laisse échapper le cas où λ se réduit à l'unité ; auquel cas la courbe est une simple ligne droite. En résumé, j'ai donc ce résultat de la discussion : *l'équation* (14) *contient sept constantes arbitraires, sauf seulement dans le cas où elle représente une ligne droite* ($\lambda = 1, 0$) *ou dans le cas où elle représente une conique* ($\lambda = 2, -1, \frac{1}{2}$).

Je conclus de là que, s'il existe un invariant différentiel Φ d'ordre moindre que 8, dont l'intégrale générale ne soit pas de la forme (14), le polynôme entier $\Phi(\lambda)$ n'admet que les racines

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad -1, \quad \frac{1}{2}.$$

En premier lieu, il est impossible qu'il n'admette que les racines 0, 1. Employons encore la notation du n° 6

$$\frac{1}{1.2\ldots i}\frac{d^i y}{dx^i} = a_i.$$

Si l'on fait $y = x^\lambda$, on a

$$a_i = \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-i+1)}{1.2\ldots i}x^{\lambda-i}.$$

On sait que Φ se compose seulement des quantités a_2, a_3, ... (Th. I).

Le polynôme $\Phi(\lambda)$, résultant de la substitution de telles expressions de a_i dans Φ, contient donc le facteur $(\lambda - 2)$, si toutefois Φ ne contient pas un terme composé simplement d'une puissance de a_2. Mais, s'il en est ainsi, Φ se réduit à ce terme seul; car il est impossible de former d'autres termes du même degré et du même poids. Donc $\Phi(\lambda)$ contient le facteur $(\lambda - 2)$, sauf au cas où Φ est simplement une puissance de a_2. Nous sommes ainsi conduits à mettre à part l'invariant différentiel a_2. C'est le plus simple de tous. L'équation $a_2 = 0$ a son intégrale générale de la forme (14) et correspondant au cas $(\lambda = 1, 0)$.

J'emploierai des lettres majuscules pour désigner chaque invariant différentiel. Pour celui-là, adoptons la lettre U. Ainsi, dorénavant, $U = a_2$.

Si Φ n'est pas une puissance de U, $\Phi(\lambda)$ admet la racine 2 et, par suite, les racines -1 et $\frac{1}{2}$. Et cela s'applique à tous les invariants différentiels. Une conique quelconque en donne une intégrale; donc Φ est au moins du cinquième ordre. Considérons maintenant l'invariant différentiel V, qui est le premier membre de l'équation différentielle des coniques. En employant le même artifice qu'au n° 6, on le forme aisément et l'on trouve

$$V = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_2 & 2a_3 \end{vmatrix} = a_2^2 a_5 - 3 a_2 a_3 a_4 + 2 a_3^3.$$

Et pour $y = x^\lambda$

$$V = \left[\frac{\lambda(\lambda - 1)}{2}\right]^3 \frac{(\lambda - 2)(\lambda + 1)(2\lambda - 1)}{2.3^3.5} x^{3(\lambda-3)} = M^3 N x^{3(\lambda-3)}.$$

Je dis maintenant que *si le résultat de la substitution $y = x^\lambda$ dans un invariant Φ quelconque conduit à un polynôme $\Phi(\lambda)$ n'ayant que les racines* $0, 1, 2, -1, \frac{1}{2}$, *cet invariant est le produit d'une puissance de* U *par une puissance de* V.

Observons, d'abord, que deux racines, qui sont simultanément du même tableau (15), figurent dans $\Phi(\lambda)$ avec le même ordre de multiplicité; car on chnage les unes dans les autres les expressions (15) par une substitution homographique. Si donc $\Phi(\lambda)$ ne contient que les racines ci-dessus, ce polynôme est le produit d'une puissance de M par une puissance de N. Je dis maintenant que $\Phi(\lambda)$ est d'un degré égal au poids de l'invariant Φ. Cette circonstance a lieu pour chacun des termes que fournit à $\Phi(\lambda)$ chacun des termes de Φ. Il y a donc à prouver simplement que le degré ne s'abaisse pas, c'est-à-dire que, si l'on fait

$$\Phi = \sum A\, a_2^m a_3^n \dots a_k^p,$$

on ne saurait avoir

$$\sum A \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2.3}\right)^n \cdots \left(\frac{1}{2.3\dots k}\right)^p = 0.$$

S'il en était ainsi, l'équation $\Phi = 0$ admettrait l'intégrale $y = e^x$, et, par suite, ce serait l'équation différentielle du septième ordre dont l'intégrale générale (à sept constantes) est

$$\frac{\beta}{\gamma} = \log\frac{\alpha}{\gamma}. \tag{16}$$

Je reviendrai tout à l'heure sur ce dernier cas. Mettons-le de côté pour le moment, et concluons que $\Phi(\lambda)$ est d'un degré égal au poids de Φ. D'autre part, $\Phi(\lambda)$ est, nous l'avons établi, de la forme $M^m N^n$. Le poids de Φ est ainsi $2m + 3n$.

$$p = 2m + 3n.$$

Le groupe de termes qui, dans $\Phi(\lambda)$, provient d'un terme unique de Φ, contient λ en facteur à une puissance précisément égale au degré de Φ. Je dis que, dans $\Phi(\lambda)$ lui-même, λ n'est pas en facteur à une puissance supérieure. S'il en était ainsi, on aurait

$$(-1)^\delta \sum A \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdots \left(\frac{1}{k}\right)^p = 0.$$

L'équation $\Phi = 0$ admettrait alors l'intégrale $y = \log x$, et Φ serait encore l'invariant réservé précédemment et correspondant à l'intégrale (16). On a donc aussi

$$\delta = m.$$

En conséquence, le résultat de la substitution $y = x^\lambda$ dans l'invariant proposé est

$$\Phi = \mathrm{BM}^m \mathrm{N}^n x^{m\lambda-(2m+3n)}.$$

La même substitution opérée dans $\mathrm{U}^{m-3n}\mathrm{V}^n$ donne

$$\mathrm{U}^{m-3n}\mathrm{V}^n = \mathrm{M}^m \mathrm{N}^n x^{m\lambda-(2m+3n)};$$

car les exposants de x sont pour chacun des deux facteurs

$$(m-3n)(\lambda-2) \quad \text{et} \quad 3n(\lambda-3),$$
$$(m-3n)(\lambda-2)+3n(\lambda-3) = m\lambda-(2m+3n).$$

Donc $(\Phi - \mathrm{BU}^{m-3n}\mathrm{V}^n)$ est identiquement nul pour $y = x^\lambda$. D'ailleurs cette expression est un invariant différentiel, par hypothèse, d'ordre moindre que 8. Il ne peut donc avoir pour intégrale l'équation (14) où λ serait aussi arbitraire, ce qui ferait huit constantes. L'expression envisagée est donc identiquement nulle.

De cette discussion résulte enfin cette conséquence, qui complète l'énoncé du n° 17 :

1° *Au-dessous du septième ordre, il n'existe que les invariants différentiels* U *et* V, *dont l'un est le premier membre de l'équation différentielle des lignes droites, l'autre celui de l'équation différentielle des coniques.*

2° *En désignant par α, β, γ trois trinômes du premier degré à coefficients arbitraires, tout invariant différentiel du septième ordre résulte de l'élimination de ces coefficients dans une des deux équations*

$$\frac{\beta}{\gamma} = \log\frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{ou} \quad \alpha = \beta^\lambda \gamma^{1-\lambda}.$$

Remarquons, en passant, cette conséquence curieuse d'un des résultats ci-dessus. On a vu que tout invariant autre que U s'évanouit pour $y = x^2$, et par suite aussi pour $y = x^{-1}$. Pour cette dernière valeur, on a $a_i = (-1)^i x^{-(i+1)}$, et j'en conclus que *dans tout invariant différentiel autre que* U, *et exprimé par les quantités a_i, la somme des coefficients des divers termes est nulle.*

19. Pour achever la théorie des invariants différentiels du septième ordre, il reste à traiter deux questions : 1° *former l'invariant dont l'in-*

tégrale générale est $\alpha = \beta^{\lambda}\gamma^{1-\lambda}$; 2° *former l'invariant dont l'intégrale générale est* $\frac{\beta}{\gamma} = \log\frac{\alpha}{\gamma}$.

Je vais traiter ces deux questions. Remarquons d'abord que, étant connue la théorie que je viens d'exposer, on pouvait prévoir la forme de l'intégrale générale de l'équation $\Delta = 0$, qui a été obtenue plus haut (n° 13); et l'on n'aurait eu qu'à déterminer l'exposant λ. Mais, ce résultat étant acquis, je vais en profiter pour traiter le nouveau problème sans calcul.

Les invariants Δ et V ont pour degrés respectifs les nombres 8 et 3, pour poids les nombres 24 et 9. Ainsi Δ^3 et V^8 sont d'un même degré et d'un même poids. Donc (th. IV, coroll.) $\Delta^3 + kV^8$ est un invariant différentiel.

Soient $\varphi(\lambda)$ et $f(\lambda)$ les polynômes entiers qui résultent de la substitution $y = x^{\lambda}$ dans Δ^3 et dans V^8. Prenons k égal à leur quotient changé de signe. Alors $\Delta^3 + kV^8$ est nul pour $y = x^{\lambda}$. Donc l'équation $\Delta^3 + kV^8 = 0$ a pour intégrale $\alpha = \beta^{\lambda}\gamma^{1-\lambda}$. La quantité k est une fonction rationnelle de λ jusqu'à présent inconnue, puisque nous n'avons pas formé $\varphi(\lambda)$. Mais nous savons que, k étant donné, il ne peut exister qu'une seule intégrale générale, et par suite six valeurs de λ renfermées dans un même tableau (15); donc les deux termes de k sont des polynômes de la forme

$$g(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 + h[(\lambda - 2)(\lambda + 1)(2\lambda - 1)]^2.$$

D'autre part, pour $\lambda = 2, -1, \frac{1}{2}$ l'équation différentielle doit se réduire à $V = 0$; et pour $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, elle doit se réduire à $\Delta = 0$ (n° 13). J'en conclus k, sauf un facteur numérique a

$$k = a\frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{[(\lambda - 2)(\lambda + 1)(2\lambda - 1)]^2}.$$

Je détermine maintenant a en faisant $\lambda = 3$ et $y = x^3$. Les déterminants V et Δ se réduisent manifestement à 2 et 3, et a en résulte; j'ai donc enfin cette conséquence :

L'équation différentielle

$$(17)\qquad 2^4 . 7^3 [(\lambda - 2)(\lambda + 1)(2\lambda - 1)]^2 \Delta^3 = 3^3 . 5^2 (\lambda^2 - \lambda + 1)^3 V^8$$

a pour intégrale générale

$$\alpha = \beta^\lambda \gamma^{1-\lambda},$$

dans laquelle α, β, γ sont des trinômes du premier degré à coefficients arbitraires.

Considérons maintenant cette équation (17) et une intégrale particulière

$$y = \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^\lambda.$$

Faisons croître λ au delà de toute limite. L'intégrale devient $y = e^x$. Donc :

Dans le cas particulier $\lambda = \infty$, o, 1, l'équation (17) *a pour intégrale générale*

$$\frac{\beta}{\gamma} = \log \frac{\alpha}{\gamma}.$$

20. Parmi les cas particuliers de (17) on remarquera celui qui correspond à $\lambda = 3$. *L'équation différentielle*

$$\left(\frac{V}{2}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{3}\right)^3 = 0$$

est celle des cubiques de troisième classe. Si, dans V et Δ, on suppose $a_2 = 0$, ces deux déterminants se réduisent à leurs diagonales $2a_3^3$ et $3a_3^2$, et le premier membre de cette dernière équation à zéro. Il est donc divisible par le facteur a_2 qui est l'invariant U. Dans le paragraphe suivant, je ferai voir qu'il est divisible par U^4. Je poserai donc

$$U^4 H = 2^2\Delta^3 - 3^3 V^2.$$

L'invariant H offre le premier exemple du théorème VI. Le coefficient de a_7 dans Δ doit être, d'après le théorème V, un invariant d'ordre moindre que 7. On vérifie sans peine, d'après l'expression de Δ (n° 6), que ce coefficient est $U^4 V$; par suite, et d'après le théorème VI, s'il existe un invariant nouveau du septième ordre Φ, son produit par des facteurs U, V est exprimable sous forme entière par U, V, Δ. Or il est manifeste qu'on ne peut former avec ces derniers d'autre combinaison invariante que le produit d'une puissance de U par une fonction homogène de Δ^3 et V^8. Il n'y a donc à considérer que des expressions telles que $\Delta^3 + kV^8$. Or cette forme ne peut être divisible par V. Elle n'est divisible par U que dans la combinaison qui vient de fournir H. Donc, comme conclusion finale :

Jusqu'au huitième ordre exclusivement, il n'existe que les invariants différentiels U, V, Δ, H *et* $\Delta^3 + kV^8$. *Le quatrième* $\Delta^3 : V^8$ *est un invariant absolu.*

IV. — *Recherches algébriques sur les invariants du septième ordre.*

21. Reprenant à un nouveau point de vue la théorie des invariants du septième ordre, je vais former directement, et par des considérations tout algébriques, l'invariant fondamental Δ. J'admets comme connu l'invariant V, et, dénotant par des accents les dérivées prises par rapport à la variable indépendante X, je considère l'expression

$$Z = mY''^{2-h}V^{2-k}(Y''^{h}V^{k})'' + m'Y''^{2-h'}V^{2-k'}(Y''^{h'}V^{k'})'' + \ldots,$$

dans laquelle $m, m', \ldots, h, h', \ldots, k, k', \ldots$ sont des constantes que je vais essayer de déterminer, de telle sorte que Z soit un invariant. Cette expression Z satisfait déjà aux conditions des théorèmes I, II, III, c'est-à-dire qu'elle ne contient ni X, ni Y, ni Y', et que chacun de ses termes est de degré et de poids constants. Elle est donc invariante pour les substitutions

$$X = ax + c, \quad Y = a'x + b'y + c'.$$

Je considérerai successivement les deux substitutions

$$X = y, \quad Y = x \qquad \text{et} \qquad X = \frac{1}{x}, \quad Y = \frac{y}{x},$$

qui, employées avec la précédente, équivalent à la substitution homographique générale (12). Il suffira que Z reste inaltérée par ces deux dernières.

Je considère la substitution $X = y$, $Y = x$ et je l'applique à un terme de Z. Je désignerai constamment par la même lettre, majusculé ou minuscule, une même fonction de X, Y ou de x, y. Je dénoterai aussi par des accents les dérivées prises par rapport à x, ce qui n'entraînera pas de confusion, pourvu qu'il demeure entendu que les dérivées des fonctions désignées par des majuscules sont prises par rapport à X, et les autres par rapport à x.

Pour la substitution envisagée, on a, conformément aux notations des nos 14 et 15,

$$\xi = y, \quad \eta = x, \quad \zeta = 1, \quad \zeta\xi' - \xi\zeta' = y', \quad D = -1,$$

et, en vertu du théorème IV,

$$(-1)^{h+3k} Y''^h V^k = y'^{-(3h+12k)} y''^h v^k.$$

Je dérive deux fois de suite par rapport à X, en dérivant chaque fois le second membre par rapport à x et divisant ensuite par y'. Désignant par T le premier terme de Z, sauf le coefficient m, j'obtiens ainsi

$$\begin{aligned} T = y'^{-32} t - k(6h+24k+1) y'^{-33} y''^3 v v' + 3(h+4k)(3h+12k+2) y'^{-34} y''^4 v^2 \\ - (6h^2+24hk+4h+12k) y'^{-33} y''^2 y''' v^2. \end{aligned}$$

En conséquence, Z se reproduit multiplié par y'^{-32} si l'on a

$$\begin{aligned} &\Sigma mk(6h+24k+1) = 0, \\ &\Sigma m(h+4k)(3h+12k+2) = 0, \\ &\Sigma m(3h^2+12hk+2h+6k) = 0. \end{aligned}$$

Ces trois équations se réduisent visiblement à deux. Je considère maintenant la seconde substitution :

$$X = \frac{1}{x}, \quad Y = \frac{y}{x}; \quad \xi = 1, \quad \eta = y, \quad \zeta = x, \quad \zeta\xi' - \xi\zeta' = -1, \quad D = -1.$$

J'en conclus, comme tout à l'heure,

$$Y''^h V^k = x^{3h+15k} y''^h v^k,$$

$$\begin{aligned} T = x^{40} t + 2(3h+15k+1)(h y''' v + k y'' v') x^{39} y'' v \\ + (3h+15k)(3h+15k+1) y''^2 v^2 x^{38}. \end{aligned}$$

En conséquence, Z se reproduit multiplié par x^{40} si l'on a

$$\begin{aligned} &\Sigma mh(3h+15k+1) = 0, \\ &\Sigma mk(3h+15k+1) = 0. \end{aligned}$$

Avec les équations précédentes, on en a ainsi quatre, qui, on le remarquera, sont linéaires et homogènes par rapport aux cinq quantités

$$\Sigma mh,\quad \Sigma mk,\quad \Sigma mh^2,\quad \Sigma mhk,\quad \Sigma mk^2,$$

et déterminent leurs rapports. D'autre part, en développant chaque terme de Z, on obtient

$$\begin{aligned}Z = {} & V^2 Y'''^2 \Sigma mh(h-1) + V^2 Y'' Y^{\text{IV}} \Sigma mh + 2 Y'' Y''' V V' \Sigma mhk \\ & + Y''^2 V V' \Sigma mk + Y''^2 V'^2 \Sigma mk(k-1).\end{aligned}$$

En conséquence, Z est entièrement déterminée, à un facteur arbitraire près. Mettant U à la place de Y″, j'obtiens ainsi l'invariant suivant :

$$(18)\qquad Z = 21 V^2 U'^2 - 27 V^2 U U'' + 6 U U' V V' + 6 U^2 V V'' - 7 U^2 V'^2,$$

qui peut s'écrire de diverses manières sous la forme qui a servi de point de départ, par exemple

$$(19)\qquad \tfrac{1}{9} Z = 3 V^2 U^{\frac{7}{3}} \left(U^{-\frac{1}{3}}\right)'' - 4 V^{\frac{13}{6}} U^{\frac{3}{2}} \left(U^{\frac{1}{2}} V^{-\frac{1}{6}}\right)''.$$

22. Voici donc un invariant du septième ordre obtenu directement. La dérivée du septième ordre a_7 ne figure que dans V″, et linéairement. Dans V, le coefficient de a_5 est U^2. Donc, dans V″, le coefficient de a_7 est $6 \times 7 U^2$. Donc, dans Z (18), le coefficient de a_7 est $6^2 \times 7 U^4 V$.

Comparons Z à Δ. Dans ce dernier, le coefficient de a_7 est $U^4 V$. La différence $Z - 6^2 \times 7 \Delta$ est donc un invariant d'ordre inférieur à 7. D'ailleurs, avec U, V, on ne peut former d'invariant de degré 8 et de de poids 24. Donc cette différence est nulle, et

$$(20)\qquad Z = 2^2 . 3^2 . 7\, \Delta.$$

On peut faire diverses vérifications de cette formule (20). Par exemple, dans Z et dans Δ, il est très-facile de former les termes en a_6^2 et aussi le terme indépendant de a_2, et de constater que ces termes sont les mêmes dans les deux membres de (20).

Mais, d'une autre manière et sans se fonder sur la théorie des invariants, on peut encore reconnaître l'identité de Z et de Δ. On a plus haut intégré l'équation $\Delta = 0$. Je vais maintenant intégrer l'équation $Z = 0$, et reconnaître l'identité des deux intégrales.

23. Si l'on fait $y = x^\lambda$, on a, suivant les notations du n° **18**,

$$U = M x^{\lambda-2}, \quad V = M^3 N x^{3(\lambda-3)},$$

M et N ne dépendant que de λ. J'en conclus

$$\left(U^{-\frac{1}{3}}\right)'' = M^{-\frac{1}{3}} \left(x^{-\frac{\lambda-2}{3}}\right)'' = M^{-\frac{1}{3}} \frac{\lambda-2}{3} \frac{\lambda+1}{3} x^{-\frac{\lambda+4}{3}},$$

$$\left(U^{\frac{1}{2}} V^{-\frac{1}{6}}\right)'' = N^{-\frac{1}{6}} \left(x^{\frac{1}{2}}\right)'' = -\tfrac{1}{4} N^{-\frac{1}{6}} x^{-\frac{3}{2}}.$$

En substituant dans (19), j'obtiens

$$\tfrac{1}{3} Z = M^8 N^2 [(\lambda-2)(\lambda+1)+3] x^{8\lambda-24} = M^8 N^2 (\lambda^2-\lambda+1) x^{8\lambda-24}.$$

Les racines de M et N fournissent des intégrales singulières. Les racines de $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ fournissent des intégrales $y = x^\lambda$, qui, par une substitution homographique, acquièrent sept constantes. On a donc ainsi l'intégrale générale de $Z = 0$. Elle coïncide avec celle que l'on a trouvée (n° **13**) pour $\Delta = 0$; donc, Z et Δ, qui, toutes deux, contiennent linéairement a_7 et dans lesquelles les coefficients de a_7 ne diffèrent que par un facteur numérique ne diffèrent elles-mêmes, que par ce facteur. L'équation (20) est donc démontrée de nouveau.

En second lieu, des expressions de V et de Z pour $y = x^\lambda$, je conclus

$$3^3 (\lambda^2 - \lambda + 1)^3 V^8 = N^2 Z^3 \ldots \quad \text{pour } y = x^\lambda,$$

et, en mettant pour N sa valeur et remplaçant Z par Δ en vertu de (20),

$$2^4 . 7^3 [(\lambda-2)(\lambda+1)(2\lambda-1)]^2 \Delta^3 = 3^3 5^2 (\lambda^2-\lambda+1)^3 V^8 \quad \text{pour } y = x^\lambda,$$

ce qui démontre de nouveau l'un des résultats du n° **19**. Quant au second résultat de ce numéro, et relatif à l'équation dont l'intégrale est $\frac{\beta}{\gamma} = \log \frac{\alpha}{\gamma}$, on le vérifie très-aisément aussi au moyen des formules (18) ou (19), en y faisant $y = e^x$.

24. Je vais, maintenant, envisager l'expression $(2^8 \Delta^3 - 3^3 V^8)$, déjà considérée au n° **20**, et chercher quel est l'exposant de la plus haute puissance de U, par laquelle elle est divisible. Cette question, qu'il est nécessaire de résoudre en vue des applications, exigerait un calcul très-compliqué si l'on voulait faire usage de l'expression de Δ sous forme de déterminant. Elle pourra se résoudre assez aisément au moyen de l'expression (18), et grâce à un artifice.

Supposons qu'il s'agisse de résoudre pareille question à l'égard d'une fonction φ quelconque de y et de ses dérivées. Je substitue dans φ à y un développement

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots,$$

et j'ordonne le résultat suivant les puissances croissantes de x, en laissant, bien entendu, les coefficients $a, b, c, \ldots$ indéterminés. Je fais ensuite $c = 0$. Si la fonction φ contient le facteur y''^m, il est clair que le résultat de la substitution contiendra le facteur x^m, et réciproquement.

Si la fonction φ envisagée est, comme ici, un invariant différentiel, on peut simplifier le calcul au moyen d'une substitution homographique, qui, par définition, n'altérera pas φ, et qui simplifiera le développement de y. On peut d'abord faire disparaître les deux premiers termes; mais cela n'a aucune importance, puisque φ ne contient ni y, ni y' (Th. I). Suivant l'hypothèse, le terme en x^2 manque. Je dis qu'on peut réduire le développement à la forme

$$y = x^3 + \alpha x^7 + \beta x^8 + \ldots.$$

Soit, en effet, le développement considéré

$$y = x^3 + ax^4 + bx^5 + cx^6 + dx^7 + \ldots.$$

Je détermine les constantes m, n, p de telle sorte que le développement de

$$Z = \frac{(x + py)^3}{(1 + mx + ny)^2}$$

coïncide avec celui de y jusqu'au sixième ordre inclusivement. A cet effet, je développe

$$(x + py)^3 = x^3(1 + px^2 + pax^3 + \ldots)^3 = x^3 + 3px^5 + 3pax^6 + \ldots,$$

$$\begin{aligned}(1 + mx + ny)^{-2} &= (1 + mx + nx^3 + \ldots)^{-2} \\ &= 1 - 2mx + 3m^2x^2 - 2(2m^3 + n)x^3 + \ldots.\end{aligned}$$

Effectuant le produit, et égalant à a, b, c les coefficients, j'ai

$$-2m = a,$$
$$3p + 3m^2 = b,$$
$$-2(2m^3 + n) - 6mp + 3pa = c,$$

équations qui déterminent successivement et sans ambiguïté m, n, p. J'ai alors

$$y = \frac{(x + py)^3}{(1 + mx + ny)^2} + \alpha x^7 + \dots,$$
$$\frac{y}{1 + mx + ny} = \left(\frac{x + py}{1 + mx + ny}\right)^3 + \alpha x^7 + \dots.$$

Si maintenant on pose

$$Y = \frac{y}{1 + mx + ny}, \quad X = \frac{x + py}{1 + mx + ny},$$

on aura pour Y le développement $Y = X^3 + \alpha X^7 + \dots$ de la forme annoncée. C'est donc un développement de cette forme que je substituerai dans la fonction envisagée $\varphi = 2^8 \Delta^8 - 3^3 V^8$. J'ai successivement

$$y = x^3 + \alpha x^7 + \dots,$$
$$a_2 = \frac{y''}{2} = 3x + 7.3\alpha x^5 + \dots,$$
$$a_3 = \frac{y'''}{2.3} = 1 + 7.5\alpha x^4 + \dots,$$
$$a_4 = \frac{y^{\text{IV}}}{2.3.4} = 7.5\alpha x^3 + \dots,$$
$$a_5 = \frac{y^{\text{V}}}{2.3.4.5} = 7.3\alpha x^2 + \dots.$$
$$V = a_2^2 a_5 - 3a_2 a_3 a_4 + 2a_3^3 = 2 + 2^2.3.7\alpha x^4 + \dots,$$

Il est immédiatement visible, d'après cette expression de V, que le second terme de Z (18) contient x au quatrième degré, d'où résulte que φ est divisible au moins par x^4. Pour s'assurer que le terme du quatrième degré ne disparaît pas, il faudrait le former au moyen de la formule (19).

Mais on peut remarquer que ce calcul est inutile. Dans Δ le coefficient de a_7 est $U^4 V$. Donc dans Δ^8 le coefficient de a_7 contient simplement le facteur U^4. Comme a_7 n'entre pas dans V, on a là un terme ne pouvant se réduire avec aucun autre, et qui ne contient pas le facteur U^5. On est donc assuré que U^4 est précisément le facteur cherché.

J'ai donc cette conclusion : *La quantité* $(2^8\Delta^3 - 3^3V^8)$ *est divisible par* U^4 *et ne l'est pas par* U^5. Soit

$$2^8\Delta^3 - 3^3V^8 = HU^4.$$

La dernière remarque prouve que la quantité h à laquelle se réduit H pour $U = 0$ contient la lettre a_7. Ce résultat sera utile plus loin. On pourrait par le calcul précédent obtenir h. Il suffit, à cet effet, de calculer α en fonction de m, n, p, remplacer ces dernières lettres par leurs expressions en a, b, c, mettre à la place de ces dernières a_4, a_5, a_6, et rétablir a_3 pour l'homogénéité. Cette expression de h ne nous sera pas utile.

25. En terminant ici ce qui concerne la théorie des invariants du septième ordre, cherchons à concevoir, de la manière la plus générale possible, un invariant différentiel. Nous nous acheminerons ainsi vers les invariants d'ordre supérieur.

Imaginons entre x et y une relation dont la forme reste inaltérée par les transformations homographiques, et qui contienne m arbitraires. Écartons tout d'abord le cas où cette équation se changerait en elle-même par une infinité de substitutions homographiques : ce cas excepté, la forme envisagée admet $(m - 8)$ invariants absolus indépendants. Entre ces invariants établissons à volonté $(m - 8 - n)$ relations. La forme ne contient plus que $(n + 8)$ arbitraires, par l'élimination desquelles on pourra obtenir une équation différentielle d'ordre $(n + 8)$, dont le premier membre sera un invariant. On conçoit donc ainsi une infinité d'invariants différentiels à partir du huitième ordre. On voit de plus qu'il n'est possible d'en obtenir d'ordre inférieur qu'au moyen d'une équation jouissant de cette propriété de se reproduire elle-même par une infinité de substitutions homographiques. Or on sait, d'après un résultat obtenu par MM. Klein et Lie, dans un Mémoire cité plus haut [1], quelles sont ces équations. Ce sont précisément celles de ces

---

[1] *Mathematische Annalen*, t. IV, p. 50.

deux formes $\alpha = \beta^{\lambda}\gamma^{1-\lambda}$ et $\frac{\beta}{\gamma} = \log\frac{\alpha}{\gamma}$ que nous avons rencontrées ici. On a donc là une confirmation nouvelle des résultats qui concernent les invariants d'ordre inférieur au huitième.

V. — *Théorie des invariants du huitième et du neuvième ordre.*

26. L'un des théorèmes généraux démontrés au § III, le théorème VI, fournit le moyen de former méthodiquement les invariants différentiels de chaque ordre. Il nous fait voir, en effet, que pour obtenir tous les invariants d'ordre n il suffit d'en connaître un de cet ordre, qui soit linéaire par rapport à la dérivée d'ordre n, et de connaître tous ceux d'ordre moindre. Le procédé sera donc complet quand on saura, au moyen de ces derniers, former cet invariant nouveau d'ordre n, linéaire par rapport à a_n. Cette question est résolue par la proposition suivante :

Théorème VII. — *Si* A *et* B *sont deux invariants différentiels d'un même degré et d'un même poids, la quantité* $BA' - AB'$ *est aussi un invariant différentiel.*

On le prouvera, soit en appliquant le théorème IV, soit plus simplement encore en observant que l'équation $BA' - AB' = 0$ résulte de l'élimination de la constante arbitraire k dans l'équation invariante $A + kB = 0$.

Si maintenant A est d'ordre $(n-1)$, et B d'ordre $(n-1)$ ou moindre, $BA' - AB'$ est d'ordre n et contient a_n linéairement. On a donc ainsi formé l'invariant nouveau nécessaire. Soit Ψ cet invariant. On le combinera avec les invariants d'ordre moindre, supposés connus, conformément au corollaire du théorème IV, c'est-à-dire en composant des quantités d'un même poids et d'un même degré ; dans ces combinaisons seront contenus, suivant le théorème VI, tous les invariants d'ordre n. En ce qui concerne l'existence des invariants A et B nécessaires à la formation de Ψ, on a la proposition suivante :

Théorème VIII. — *Avec un invariant quelconque* A *et les invariants* U, V, Δ, *on peut toujours composer un invariant absolu rationnel.*

Soit, en effet, la combinaison $AU^u V^v \Delta^d$. Désignons par p et δ le poids et le degré de A. Le degré et le poids du produit seront nuls si l'on fait

$$\delta + u + 3v + 8d = 0, \quad p + 2u + 9v + 24d = 0.$$

Ces équations se ramènent à celles-ci :

$$u = p - 3\delta, \quad 3v + 8d = 2\delta - p,$$

qui peuvent toujours se résoudre en nombres entiers positifs ou négatifs u, v, d.

Les exposants ainsi choisis, la combinaison envisagée est un invariant absolu ; elle peut donc servir à former Ψ. Au septième ordre, nous possédons déjà un invariant absolu $\Delta^3 : V^8$. Nous sommes donc en mesure d'appliquer la méthode sans y rencontrer aucun obstacle, et nous pouvons dire que :

Théorème IX. — *A partir du septième ordre, il existe pour chaque ordre un invariant absolu.*

Soit maintenant Φ un invariant différentiel du $n^{\text{ième}}$ ordre. D'après le théorème VI, on a identiquement

$$C\Phi = E\Psi^n + E_1\Psi^{n-1} + \ldots + E_{n-1}\Psi + E_n,$$

égalité dans laquelle $C, E, E_1, \ldots, E_n$ sont des invariants d'ordre moindre que n. Soit $B\Psi$ un des invariants absolus qu'on peut former avec Ψ suivant le théorème VIII. Nous pouvons l'introduire au lieu de Ψ, puis diviser par E_n, de manière à obtenir finalement

$$\frac{C\Phi}{E_n} = F(B\Psi)^n + F_1(B\Psi)^{n-1} + \ldots + F_{n-1}(B\Psi) + 1,$$

équation dans laquelle tous les termes sont des invariants absolus. Il résulte de là cette proposition :

Théorème X. — *Toute équation différentielle invariante d'ordre n, non inférieur à 7, consiste en une relation entre un invariant différentiel absolu d'ordre 7, un invariant absolu d'ordre 8, ..., un invariant absolu d'ordre n.*

En effet, si la proposition est vraie jusqu'à l'ordre $(n-1)$ inclusivement, la dernière équation montre qu'elle sera également vraie pour l'équation $\Phi = 0$, qui est quelconque d'ordre n. Or son exactitude a été prouvée pour le septième ordre; donc elle est exacte d'une manière générale.

27. J'applique les principes généraux, que je viens d'exposer, aux invariants du huitième ordre. Pour former l'invariant fondamental comme l'indique le théorème VII, j'emploie l'invariant absolu $\Delta^3 : V^8$. J'ai ainsi

$$\Psi = 3V\Delta' - 8\Delta V'.$$

Mais on ne saurait conserver sans inconvénient, pour les applications, cet invariant, car il est décomposable en deux facteurs. En effet, de l'égalité (nº 24)

$$2^8\Delta^3 - 3^3V^8 = HU^4,$$

on déduit, en différentiant,

$$2^6\Delta^2\Psi = U^3(VUH' - 8UHV' + 4VHU'),$$

et l'on en conclut que Ψ contient le facteur U^3. Je prendrai donc pour invariant fondamental et je désignerai par T la quantité

$$T = \frac{3V\Delta' - 8\Delta V'}{U^3}.$$

Dans Δ le coefficient de a_7 est U^4V; par suite, dans T le coefficient de a_8 est $24UV^2$. Il sera utile de savoir aussi à quoi se réduit T pour $U = 0$; l'avant-dernière égalité le met en évidence. Les quantités Δ, V, U' sont alors $3a_3^8$, $2a_3^3$, $3a_3$. Désignons par h ce que devient H, et concluons

$$(21)\qquad T \equiv 2^{-6}.3^{-1}.a_3^{-12}h, \quad (U = 0).$$

L'invariant T a pour degré 8, et pour poids 28. Remarquons qu'on peut aisément composer un autre invariant T_1 dans lequel le coefficient de a_7 ne contienne que le facteur V. Il suffit de poser

$$(22)\qquad T_1 = \frac{V^4T - \frac{1}{6}H}{U}.$$

L'invariant T_1 est entier, car la formule (21) montre que le numérateur se réduit à zéro pour $U = 0$; il est donc divisible par U.

28. On peut former directement l'invariant T d'une autre manière. Il provient ici de l'élimination de k dans l'équation $\Delta^3 + kV^2 = 0$. En conséquence, l'équation $T = 0$ a pour intégrale générale $\alpha = \beta^{\lambda}\gamma^{1-\lambda}$, dans laquelle non-seulement les coefficients des trinômes, mais encore l'exposant λ, sont une constante arbitraire. On peut donc obtenir T par élimination. On sait déjà éliminer une constante et parvenir à l'équation de Jacobi

$$y'(Ax + By + C) + A_1x + B_1y + C_1 + (A_2x + B_2y)(y - xy') = 0.$$

On aura maintenant à éliminer A, B,..., ce qui se fera aisément par le même artifice déjà employé au n° 6 pour former Δ. On trouve ainsi une équation dont le premier membre est

$$T = \begin{vmatrix} 3a_3 & 2a_2 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 4a_4 & 3a_3 & a_3 & a_2 & 2a_2^2 & 0 \\ 5a_5 & 4a_4 & a_4 & 2a_3 & 5a_2a_3 & a_2^2 \\ 6a_6 & 5a_5 & a_5 & 3a_4 & 6a_2a_4 + 3a_3^2 & 3a_2a_3 \\ 7a_7 & 6a_6 & a_6 & 4a_5 & 7a_2a_5 + 7a_3a_4 & 4a_2a_4 + 2a_3^2 \\ 8a_8 & 7a_7 & a_7 & 5a_6 & 8a_2a_6 + 8a_3a_5 + 4a_4^2 & 5a_2a_5 + 5a_3a_4 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant coïncide exactement avec l'invariant T obtenu précédemment. Pour s'en convaincre, que l'on retranche des éléments de la cinquième colonne ceux de la quatrième multipliés par $2a_2$, puis ceux de la sixième multipliés par $\frac{a_3}{a_2}$; on réduit ainsi à zéro tous les termes, sauf les deux derniers, qui deviennent respectivement

$$\text{Le cinquième...} \quad -\frac{a_2^2a_5 + 2a_3^3 - 3a_2a_3a_4}{a_2} = -\frac{V}{a_2},$$

$$\text{Le sixième.....} \quad \frac{3a_3a_2a_5 + 4a_2a_4^2 - 2a_2^2a_6 - 5a_3^2a_4}{a_2} = -\frac{1}{3}\frac{V'}{a_2}.$$

Si l'on désigne par E, F les deux mineurs correspondants, on a ainsi

$$T = -\frac{V}{a_2}E + \frac{V'}{3a_2}F.$$

Dans E seulement se trouve a_8, et l'on obtient aisément

$$T = 24UV^2a_8 + \ldots.$$

Ainsi dans le déterminant le coefficient de a_8 est le même que dans l'invariant précédent; donc, eu égard à leur mode de formation, ils coïncident entièrement.

29. Il est nécessaire de former encore une combinaison particulière avec l'invariant T et les précédents, en vue des applications. Au moyen de la formule (18) et en poussant les calculs jusqu'aux termes en V^2 exclusivement, je puis écrire

$$\begin{aligned} Z^2 &= 7^2U^4V'^4 - 2^2 3.7 U^3VV'(U'V' + UV'') + \ldots, \\ U^2V'^2Z &= -7U^4V'^4 + 2.3U^3VV'(U'V' + UV'') + \ldots, \\ U^3VV'Z' &= \ldots\ldots - 2^3.U^3VV'(U'V' + UV'') + \ldots \end{aligned}$$

d'où il résulte que la combinaison

$$Z^2 + 7U^2V'^2Z - 2^{-2}.3.7U^3VV'Z'$$

est divisible par V^2. En y mettant Δ au lieu de Z suivant la formule (20), j'ai cette conséquence que la combinaison

$$\Omega = 2^4.3^2\Delta^2 + 2^2U^2V'^2\Delta - 3U^3VV'\Delta'$$

est divisible par V^2. Prenant maintenant l'expression de T

$$U^3T = 3V\Delta' - 8\Delta V',$$

l'élevant au carré, j'obtiens

$$U^4T^2 + 2^6.3^2\Delta^3 = 2^4\Delta\Omega + 3^2U^2\Delta'^2V^2;$$

d'où résulte que le premier membre est divisible par V^2. Je fais maintenant intervenir H

$$2^6\Delta^3 - 3^3V^4 = U^4H,$$

je supprime le facteur U^4, et j'obtiens la combinaison suivante, qui est entière :

$$G = \frac{U^4T^2 + 9H}{V^2}. \tag{23}$$

On est assuré que G ne contient plus le facteur V. En effet, dans T le coefficient de a_8 contient simplement le facteur V^2; donc, dans T^2 et par suite dans le numérateur de G, le terme du premier degré en a_8, qui ne peut se réduire avec aucun autre, contient le facteur V^2 et non V^3.

30. Au moyen de T, on peut former l'invariant absolu $U^4 V^{-4} T$. En y joignant l'invariant absolu $\Delta^3 V^{-8}$, et appliquant le théorème X, on a cette conséquence :

Toute équation différentielle invariante du huitième ordre consiste en une relation entre les deux quantités $U^4 V^{-4} T$ *et* $V^{-8} \Delta^3$.

D'où il suit un procédé simple pour former l'équation différentielle correspondant à une intégrale projective donnée et contenant huit constantes. On en prendra un cas particulier, sans aucune constante, on calculera les deux invariants absolus, et entre leurs expressions on éliminera la variable indépendante. C'est, on le voit, un procédé tout semblable à celui qu'on emploie en Algèbre pour calculer un invariant en fonction des invariants fondamentaux d'une forme. Je vais immédiatement en donner un exemple, en cherchant l'*équation différentielle des courbes du troisième degré à point double*.

Je prends l'équation de la courbe sous la forme

$$y = -x^2 + (1-x)^{-1}.$$

En posant $(1-x)^{-1} = t$, on a

$$U = a_2 = -1 + t^3, \quad a_3 = t^4, \quad a_4 = t^5, \quad \ldots, \quad a_p = t^{p+1}.$$

Le calcul de Δ s'effectue très-rapidement, sous la forme en déterminant (n° 6), et l'on obtient

$$V = t^6(1+t^3), \quad \Delta = t^{17}(1+t^3+t^6), \quad T = -3t^{24}.$$

En conséquence et en remplaçant t^3 par z, on a

$$\eta = \frac{\Delta^3}{V^8} = \frac{z(1+z+z^2)^3}{(1+z)^8}, \quad \xi = \frac{U^4 T}{V^4} = -\frac{3(z-1)^4}{(1+z)^4}.$$

L'équation cherchée résulte de l'élimination de z entre ces deux dernières. Cette élimination est très-simple, la dernière équation donnant immédiatement z en fonction de ξ, mais sous forme irrationnelle. Chassant ensuite les radicaux après avoir porté cette valeur dans η, on obtient

(24) $$(2^8.3^2\eta + \xi^2 - 2.3^3\xi - 3^5)^2 + 2^6.3.\xi^3 = 0.$$

Substituant à la place de ξ, η leurs expressions et tenant compte de (23), je transforme cette équation en la suivante :

$$(25) \qquad (G - 2.3^3TV^2)^2 + 2^6.3U^4T^3 = 0.$$

L'équation (25) *est l'équation différentielle des cubiques douées d'un point double.*

31. Il importe de savoir s'assurer si un invariant différentiel ainsi exprimé au moyen des invariants fondamentaux est décomposable en facteurs. Les seuls facteurs qui puissent n'être pas immédiatement en évidence sont ceux qui composent le coefficient de a_8 dans T, c'est-à-dire U et V. Voyons d'abord comment on pourra trouver le facteur U, dans une fonction des deux quantités ξ, η.

Au moyen des deux formules

$$V^4T = UT_1 + \tfrac{1}{6}H, \quad 2^8\Delta^3 = 3^8V^8 + U^4H,$$

on remplace T et Δ^3 par T_1 et H ; en sorte que l'on aura une fonction des deux quantités a, b

$$a = \frac{U^5T_1}{V^8}, \quad b = \frac{U^4H}{V^8}.$$

On prendra le groupe des termes $a^m b^n$ pour lesquels $(5m + 4n)$ est minimum, et l'on aura ainsi en évidence le facteur U à la puissance $(5m + 4n)$. Ce facteur enlevé, je dis que la fonction n'est plus divisible par U. En effet, si le groupe des termes qui ne contiennent pas explicitement le facteur U se compose de plus d'un terme, il y entre la quantité T_1 : dans T_1 la lettre a_8 a pour coefficient une puissance de V ; donc, dans le terme qui contient T_1 à la plus haute puissance, existe un terme ne se réduisant avec aucun autre et qui ne contient pas le facteur U. Si, au contraire, il n'y a qu'un seul terme, la non-existence du facteur U est manifeste.

Faisons immédiatement l'application de ce procédé à l'équation (25). Prenons-y le terme élevé au carré et remettons à la place de G son expression (23). Nous avons ainsi

$$G - 2.3^3TV^2 = \frac{U^4T^2 + 9H - 2.3^3(UT_1 + \frac{1}{6}H)}{V^2} = U\,\frac{U^3T^2 - 2.3^3T_1}{V^2};$$

d'où résulte que cette quantité contient une fois le facteur U, et que *le premier membre de* (25) *est divisible par* U^2.

32. Pour rechercher le facteur V, je réduis l'invariant considéré à ne contenir T qu'au premier degré, au moyen de la formule (23). Posant

$$a=\frac{U^4G}{V^6}, \quad b=\frac{\Delta^3}{V^8},$$

je réduis l'invariant à la forme $\xi f(a, b)+\varphi(a, b)$. Soient $a^m b^n$ et $a^\mu b^\nu$ des termes de f et φ. Après avoir chassé les dénominateurs, on aura un groupe de termes où le facteur V ne sera pas en évidence. Ce groupe sera composé des termes pour lesquels $(6m+8n+4)$ ou $(6\mu+8\nu)$ est maximum. De la manière la plus générale, supposons

$$\text{max. de } (6m+8n+4)=\text{max. de } (6\mu+8\nu)=k.$$

Le cas où l'une des deux parties seulement de l'invariant contribuerait au groupe envisagé est un cas particulier auquel l'analyse s'appliquera, comme on va le voir.

Le groupe formé des termes où le facteur V n'est pas en évidence peut s'écrire ainsi :

$$S=\Delta^{\frac{3k}{8}}\left[U^4T\Delta^{-\frac{3}{2}}f_1\left(U^4G\Delta^{-\frac{9}{4}}\right)+\varphi_1\left(U^4G\Delta^{-\frac{9}{4}}\right)\right].$$

Je dis qu'il n'est pas divisible par V. Si, en effet, il était divisible par V, il en serait de même de la quantité

$$S'=U^8T^2\Delta^{-3}f_1^2\left(U^4G\Delta^{-\frac{9}{4}}\right)-\varphi_1^2\left(U^4G\Delta^{-\frac{9}{4}}\right).$$

Cette dernière, en négligeant des termes qui contiennent V en facteur, peut s'écrire

$$-S'\equiv 9f_1^2\left(U^4G\Delta^{-\frac{9}{4}}\right)+\varphi_1^2\left(U^4G\Delta^{-\frac{9}{4}}\right)\equiv\psi\left(U^4G\Delta^{-\frac{9}{4}}\right).$$

Dans G il existe, ainsi qu'on l'a déjà fait observer, un terme contenant a_8 et non divisible par V. Donc la quantité $U^4G\Delta^{-\frac{9}{4}}$ ne se réduit pas à une constante pour $V=0$. Une fonction de cette seule quantité ne peut donc s'annuler identiquement, en vertu de l'hypothèse $V=0$, et, par suite, ne peut contenir le facteur V.

Ainsi la transformation indiquée met en évidence le facteur V, présément avec le plus haut exposant possible.

Si l'on fait application au premier membre de (25), on voit que ce premier membre n'est pas divible par V.

33. Occupons-nous maintenant des invariants du neuvième ordre. Nous pouvons former l'invariant fondamental au moyen de l'invariant absolu U^4TV^{-4}. Nous aurons ainsi

$$S = UVT' + 4(VU' - UV')T.$$

Pour une application ultérieure, nous formerons de préférence un autre invariant fondamental Θ au moyen de l'invariant absolu $U^8T^2\Delta^{-3}$. Faisons d'abord

$$U^3\Psi = 2(U^4T)'\Delta - 3U^4T\Delta'.$$

L'invariant Ψ est divisible par V. De (23), je conclus en effet

$$(26) \qquad \frac{U^8T^2}{\Delta^3} = -2^6.3^3 + \frac{V^2(U^4G - 3^5V^6)}{\Delta^3} = -2^6.3^3 + \frac{V^2K}{\Delta^3},$$

K étant un invariant entier, et ensuite, en différentiant,

$$U^7T\Psi = 2VV'\Delta K + V^2(\Delta K' - 3K\Delta');$$

d'où résulte que Ψ contient le facteur V. Je poserai donc

$$(27) \qquad \Theta = \frac{\Psi}{V} = \frac{2U\Delta T' + T(8U'\Delta - 3U\Delta')}{V}.$$

D'ailleurs, en éliminant T' entre les expressions de S et Θ, on ramène ces invariants l'un à l'autre, par la formule

$$2\Delta S - V^2\Theta = U^4T^2.$$

L'invariant Θ a pour degré et pour poids les nombres 14 et 46. Il permet de former l'invariant absolu $U^4\Theta V^{-6}$. En conséquence, on a ce cas particulier du théorème X :

Toute équation différentielle invariante du neuvième ordre consiste en une relation entre les trois quantités $\frac{U^4\Theta}{V^6}$, $\frac{U^4T}{V^4}$, $\frac{\Delta^6}{V^8}$.

34. Posons, comme plus haut,

$$\frac{U^4T}{V^4}=\xi, \qquad \frac{\Delta^3}{V^3}=\eta.$$

En prenant les dérivées, j'en conclus

$$\Theta=\frac{1}{U^3V}[2\Delta(U^4T)'-3U^4T\Delta']=\frac{\Delta^4}{U^7TV}\left(\frac{\xi^2}{\eta}\right)',$$

$$T=\frac{1}{U^3}[3V\Delta'-8\Delta V']=\frac{V^9}{\Delta^2U^3}\eta',$$

et, en divisant membre à membre,

$$\frac{U^4\Theta}{V^8}=\xi\,\frac{2\eta\xi'-\xi\eta'}{\eta'}. \tag{28}$$

J'en conclus que *toute équation différentielle invariante du neuvième ordre se réduit à une relation entre* ξ, η *et le rapport de leurs dérivées premières.*

Cette équation, intégrée par rapport à ξ, η, donne lieu à une équation invariante du huitième ordre contenant une constante arbitraire. C'est une intégrale première de l'équation du neuvième ordre. Ainsi :

L'intégration d'une équation différentielle invariante du neuvième ordre se ramène à l'intégration successive d'une équation du premier ordre et d'une équation invariante du huitième ordre.

Sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans plus de détails, on aperçoit que cette dernière proposition se généralise ainsi :

Théorème XI. — *L'intégration d'une équation différentielle invariante d'ordre* $(n+8)$ *se ramène à l'intégration successive d'une équation d'ordre* n *et d'une équation invariante du huitième ordre.*

VI. — *Applications et propriétés dualistiques des invariants différentiels.*

35. Je vais appliquer les résultats des n^{os} 33 et 34 à l'équation différentielle des courbes du troisième degré. Je vais mettre, à cet effet, cette équation sous la forme canonique, c'est-à-dire l'exprimer par les invariants différentiels précédents.

Dans l'invariant Θ, défini par (27), le coefficient de a_9 est $2^4.3^3 U^2 V\Delta$. Je vais simplifier cet invariant en faisant successivement disparaître un facteur V et un facteur U. D'après (26) et (27) et d'après la définition de T (n° 27), j'ai

$$\left.\begin{aligned} U^7 T\Theta &\equiv 2V'\Delta K \equiv 2U^4 V' G\Delta, \\ T &\equiv -8\Delta V', \\ \Theta + \tfrac{1}{4}G &\equiv 0, \end{aligned}\right\} \quad (V = 0).$$

Je suis ainsi conduit à l'invariant entier

$$\Theta_1 = \frac{1}{V}(\Theta + \tfrac{1}{4}G),$$

dans lequel le coefficient de a^9 est $2^4.3^3 U^2\Delta$. Pour faire maintenant disparaître un facteur U, je cherche à quoi se réduisent les divers invariants quand on fait $U = 0$. En désignant par h ce que devient H dans cette hypothèse, je rappelle que l'on a [n° 27 et éq. (23)].

$$H \equiv h, \quad \Delta \equiv 3a_3^8, \quad V \equiv 2a_3^3, \quad T \equiv 2^{-5}.3^{-1}\alpha_3^{-12} h, \quad G \equiv 2^{-2}.3^2 a^{-6} h, \quad (U = 0).$$

D'après les définitions de Θ et Θ_1, on aura en conséquence

$$\left.\begin{aligned} \Theta &\equiv \frac{8T\Delta U'}{V} \equiv 2^{-3}.3\, a_3^{-6} h, \\ \Theta_1 &\equiv 2^{-5}.3.5\, a_3^{-9} h \equiv 2^{-1}.3^2.5TV, \end{aligned}\right\} \quad (U = 0).$$

J'ai donc le nouvel invariant entier

$$\Theta_2 = \frac{1}{U}\left(\Theta_1 - \frac{3^2.5}{2}TV\right), \tag{29}$$

dans lequel le coefficient de a_9 est $2^4.3^3 U\Delta$. Je vais démontrer que *l'équation $\Theta_2 = 0$ est l'équation différentielle des courbes du troisième degré.*

36. Je forme directement l'équation différentielle dont il s'agit par le procédé déjà employé pour former Δ et T. Son premier membre est

alors le déterminant C suivant :

$$C = \begin{vmatrix} a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_2^2 & 2a_2a_3 & 2a_2a_4+a_3^2 & 2a_2a_5+2a_3a_4 & 2a_2a_6+2a_3a_5+a_4^2 & 2a_2a_7+2a_3a_6+2a_4a_5 \\ 0 & a_2^2 & 2a_2a_3 & 2a_2a_4+a_3^2 & 2a_2a_5+2a_3a_4 & 2a_2a_6+2a_3a_5+a_4^2 \\ 0 & 0 & a_2^3 & 3a_2^2a_3 & 3a_2^2a_4+3a_2a_3^2 & a_3^3+6a_2a_3a_4+3a_2^2a_5 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant se compose, comme on voit, de Δ multiplié par a_2 et *bordé* par la ligne supérieure et la colonne de droite. En conséquence, dans C le coefficient de a_9 est $-$ UΔ. On y voit immédiatement aussi le coefficient de a_8^2 : il coïncide avec le coefficient de a_7 dans Δ, multiplié par a_2 ou U. Ainsi j'écris

$$C = -U\Delta a_9 + U^5 V a_8^2 + A,$$

et A ne contient que les dérivées d'ordre inférieur à 9 et est linéaire en a_8.

Pour comparer C et Θ_2 cherchons dans ce dernier le terme en a_9 et le terme en a_8^2. Le premier nous est déjà connu; quant au second, observons d'abord que a_8 n'entre pas dans Θ_2 à un degré supérieur à 2, ainsi que nous allons le constater.

Remontons d'abord à Θ. D'après (27), a_8 y entre au plus haut degré, c'est-à-dire au second, dans le terme $-3U\Delta' TV^{-1}$. On a

$$\Delta = U^4 V a_7 + \ldots,\quad \Delta' = 2^3 U^4 V a_8 + \ldots,\quad T = 2^3.3 U V^2 a_8 + \ldots.$$

En conséquence, dans Θ, le coefficient de a_8^2 est $-2^6.3^2 U^6 V^2$.

Dans Θ_1 (n° 35) on a un nouveau terme en a_8^2 provenant de G. En vertu de (23), le coefficient de a_8^2 dans G est le même que dans $\dfrac{U^4T^2}{V^2}$, c'est-à-dire $2^6.3^2 U^6 V^2$. En conséquence, on a pour le coefficient cherché

$$\text{Dans}\quad \Theta_1 = \frac{1}{V}\left(\Theta + \frac{1}{4}G\right)\ldots - 2^4.3^3 U^6 V,$$

$$\text{Dans}\quad \Theta_2 = \frac{1}{U}\left(\Theta_1 - \frac{3^2 5}{2} TV\right)\ldots - 2^4.3^3 U^5 V.$$

J'ai donc

$$\Theta_2 = 2^4.3^3(U\Delta a_9 - U^5 V a_8^2) + B,$$

et B, comme A, ne contient ni a_9 ni a_8^2. Comparant ces expressions de C et de Θ_2, j'en conclus

$$\Theta_2 + 2^4.3^3 C = B + 2^4.3^3 A = D.$$

Comme Θ_2 et C sont des invariants, D en est un aussi. A cause des propriétés de A et B, D est un invariant du huitième ordre linéaire en a_8. Je dis que cet invariant ne peut être que zéro.

En premier lieu, D ne peut être d'ordre inférieur à 8, s'il existe. Son degré et son poids sont les nombres 10 et 35. S'il était d'ordre inférieur à 8, il se composerait de termes $U^m V^n \Delta^p$; j'omets H dont le degré et le poids surpassent ceux de D. On aurait alors

$$m + 3n + 8p = 10, \quad 2m + 9n + 24p = 35,$$

équations qui ne peuvent se résoudre en nombres positifs.

Si D existe, il est donc du huitième ordre. Le coefficient de a_8 est alors du degré 9 et du poids 27. C'est donc (th. V) V^3, sauf un coefficient numérique. Dans T, le coefficient de a_8 est, sauf un coefficient numérique, UV^2. Donc UD et VT, sauf un facteur numérique, ne différeraient que par un invariant E d'ordre inférieur à huit, et dont le degré et le poids seraient les nombres 11 et 37. Les équations

$$m + 3n + 8p = 11, \quad 2m + 9n + 24p = 37$$

sont impossibles en nombres positifs : donc E est nul. Mais UD et VT ne peuvent être égaux, puisque T ne contient pas le facteur U; donc D n'existe pas.

Donc on a

$$\Theta_2 = -2^4.3^3 C,$$

et cette identité démontre la proposition énoncée.

37. Je vais, maintenant, appliquer le théorème XI à cet équation, et chercher son intégrale première invariante. On aura ainsi *l'équation différentielle des courbes du troisième degré dont l'invariant absolu est un nombre donné.*

La première opération consiste à introduire, au lieu de Θ_2, les quantités ξ, η. D'après le mode de formation de Θ_2, l'équation s'écrit

$$\Theta + \frac{1}{4} G - \frac{3^2 . 5}{2} TV^2 = 0.$$

En multipliant par $V^2 U^4$, on ramène les invariants fondamentaux

$$U^4 V^2 \Theta + \frac{1}{4} U^2 T^2 - \frac{3^2 . 5}{2} U^4 V^4 T + \frac{3^2}{4}(2^4 \Delta^3 - 3^3 V^6) = 0.$$

Divisant par V^6 et employant les formules du n° 34, j'ai l'équation différentielle du premier ordre cherchée

$$\xi \eta \xi' = \frac{3}{8}[(\xi + 3)(\xi + 27) + 3.2^4 \eta] \eta'.$$

Cette équation ne rentre dans aucune catégorie de celles que l'on sait intégrer par des moyens généraux. Mais nous savons ici que son intégrale générale est algébrique.

Je poserai, pour simplifier l'écriture,

$$(30) \qquad \frac{3}{8}(\xi + 3)(\xi + 27) = A, \quad 3^2 2^5 \eta = \zeta,$$

et l'équation à intégrer devient

$$\zeta \xi \xi' + (\zeta - A) \zeta' = 0.$$

Soit une intégrale

$$P = \zeta^n + M_1 \zeta^{n-1} + M_2 \zeta^{n-2} + \ldots + M_{n-1} \zeta + M_n = 0,$$

dans laquelle les M sont des fonctions rationnelles de ξ. On devra avoir, en désignant par λ une autre fonction de cette même lettre,

$$(31) \qquad \xi \zeta \frac{\partial P}{\partial \zeta} + (A - \zeta) \frac{\partial P}{\partial \xi} + \lambda P = 0.$$

Dénotant par des accents les dérivées prises par rapport à ξ, j'en conclus le système

$$\begin{aligned}
M'_1 &= \lambda + n\xi,\\
M'_2 &= [\lambda + (n-1)\xi]\,M_1 + AM'_1,\\
M'_3 &= [\lambda + (n-2)\xi]\,M_2 + AM'_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
M'_n &= (\lambda + \xi)\,M_{n-1} + AM'_{n-1},\\
0 &= \lambda M_n + AM'_n.
\end{aligned}$$

Soit $M_n = \frac{\alpha}{\beta}$. La deuxième équation donne

$$\lambda = A\frac{\alpha'}{\alpha} - A\frac{\beta'}{\beta};$$

donc, si λ est fractionnaire, les racines de son dénominateur sont simples. Mais alors la première équation donne, pour M_1, une fonction transcendante, ce qui ne se peut. Donc λ est entier, et par suite du premier degré, et ensuite M_1 du deuxième, M_2 du quatrième, ..., M_n du degré $2n$.

Nous connaissons déjà une intégrale particulière, répondant au cas $n = 2$; c'est celle que nous avons trouvée au n° **30**, l'équation différentielle des cubiques à point double. Cette intégrale est ainsi fournie par l'équation (22). Si l'on y fait le changement de notation (30), on a ainsi

$$2^6P = (2^3\zeta + \xi^2 - 2.3^2\xi - 3^4)^2 + 2^6.3\xi^3,$$

et, avec ce polynôme P, on vérifie aisément l'identité (31), dans laquelle

$$\lambda = -\frac{3}{2}(\xi + 9).$$

Des considérations déduites de la théorie des formes cubiques ternaires, et qu'on trouvera un peu plus loin, prouvent l'existence d'une autre intégrale particulière, répondant aussi au cas de $n = 2$. Avec quelque tâtonnement, on parvient à la trouver sous la forme suivante :

$$0 = 2^4Q = 2^8\zeta^2 + 2^4(\xi + 3^3)(\xi - 3^2.5)\zeta + (\xi + 3^3)^4;$$

on vérifiera l'identité (31) avec ce polynôme Q, et

$$\lambda = -\frac{3}{2}(\xi + 3).$$

Au moyen de ces deux intégrales particulières, l'intégration s'achève. Prenant, en effet, les deux identités

$$\xi\zeta\frac{\partial P}{\partial\zeta} + (A-\zeta)\frac{\partial P}{\partial\xi} = \frac{3}{2}(\xi+9)P,$$

$$\xi\zeta\frac{\partial Q}{\partial\zeta} + (A-\zeta)\frac{\partial Q}{\partial\xi} = \frac{3}{2}(\xi+3)Q,$$

je les écris ainsi

$$\xi\zeta\frac{\partial(P\zeta^3)}{\partial\zeta} + (A-\zeta)\frac{\partial(P\zeta^3)}{\partial\xi} = \frac{9}{2}(\xi+3)P\zeta^3,$$

$$\xi\zeta\frac{\partial(Q^3)}{\partial\zeta} + (A-\zeta)\frac{\partial(Q^3)}{\partial\xi} = \frac{9}{2}(\xi+3)Q^3,$$

et j'en conclus une relation toute pareille pour la combinaison $(P\zeta^3 - cQ^3)$, ce qui prouve que l'équation proposée a pour intégrale générale

$$P\zeta^3 = cQ^3,$$

c étant une constante arbitraire. Aux intégrales particulières P et Q il faut encore en joindre une autre digne de remarque. Pour une valeur particulière de c, le polynôme $P\zeta^3 - cQ^3$ se réduit à un carré. On a, en effet,

$$Q^3 + 2^3.3^4\zeta^3 P = R^2,$$

$$2^6 R = 2^9\zeta^4 + 2^6.3[(\xi-3^2)^2 + 2^4.3^4]\zeta^2 + 2^2.3(\xi+3^3)^3(\xi-3^2.5)\zeta + (\xi+3^3)^6.$$

Si l'on fait intervenir R au lieu de P, on pourra écrire l'intégrale sous la forme suivante, dans laquelle h est la constante arbitraire :

$$R^2 = hQ^3.$$

38. Nous connaissons la signification de l'intégrale particulière $P=0$; il reste à trouver la signification des deux autres $Q=0$, $R=0$, et aussi la liaison qui existe entre l'invariant absolu h et l'invariant absolu de la courbe du troisième degré, mis sous la forme habituelle.

D'après la théorie des formes cubiques ternaires, on sait qu'il y a deux invariants relatifs, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, l'un du quatrième degré, l'autre du sixième par rapport aux coefficients de la forme, et que le rapport $\mathfrak{T}^2 : \mathfrak{S}^3$ est un invariant absolu k. Si l'on voulait chercher directement l'équation différentielle des cubiques, qui ont l'invariant k, il faudrait déterminer les coefficients en fonctions de x, y et des dérivées jusqu'à l'ordre 8, et substituer dans ϖ et s. Or les coefficients s'expriment ainsi linéairement en fonction de la dérivée huitième de y ou a_8. L'équation sera donc de la forme

$$Y^2 = kX^3,$$

X et Y contenant a_8, la première au quatrième degré, la seconde au sixième au plus. D'autre part, a_8, dans nos équations intégrales, ne figure que dans la lettre ξ et y entre linéairement; donc cette dernière équation doit coïncider exactement avec $R^2 = hQ^3$, et il n'y a plus qu'à trouver le rapport numérique des invariants absolus k et h.

Prenons, pour s et ϖ, les déterminations qui, à l'égard de la forme canonique $(x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz)$, se réduisent à

$$s = l^4 - l, \quad \varpi = 1 - 20l^3 - 8l^6.$$

Le discriminant est alors $\varpi^2 - 64s^3$ (¹). Quand k est égal à 64, la courbe a un point double. L'équation intégrale doit alors se réduire à $P = 0$, et, par suite, h à l'unité. Donc, en résumé :

Si ϖ et s sont les invariants fondamentaux d'une courbe du troisième degré, et que l'on fasse $\varpi^2 : s^3 = 64h$, l'équation différentielle des courbes du troisième degré, qui ont l'invariant absolu h, est

$$R^2 = hQ^3.$$

Cette équation peut s'écrire

$$2^3 . 3^3 \zeta^3 P = (h - 1) Q^3,$$

$P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ *sont respectivement les équations différentielles des cubiques à point double, des cubiques équianharmoniques, des cubiques harmoniques.*

Si l'on applique à l'expression Q le procédé expliqué aux nᵒˢ 31 et 32 pour la recherche des facteurs, on trouve sans peine

$$Q = \frac{U^4}{V^{12}} Q_1,$$

(¹) *Voir*, par exemple, SALMON, *Algèbre supérieure*, traduction française de Bazin, p. 210.

Q_1 étant un invariant entier qui n'est divisible ni par U ni par V. On a trouvé précédemment que de même P est de la forme

$$P = \frac{U^{10}}{V^{12}} P_1,$$

P_1 étant également un invariant entier indécomposable. Au moyen de ces invariants, on met l'équation finale sous la forme

$$2^{18}.3^{11}\Delta^9 P_1 = (h-1)U^3 Q_1^3.$$

39. Je terminerai en appliquant le principe de dualité aux invariants différentiels; soient X, Y deux variables liées par une relation, et x, y deux nouvelles variables. Posons, pour faire une transformation corrélative,

$$X = \frac{dy}{dx}, \quad Y = x\frac{dy}{dx} - y,$$

d'où résultent inversement

$$\frac{dY}{dX} = x, \quad X\frac{dY}{dX} - Y = y;$$

puis, en accentuant les dérivées prises par rapport à x,

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{1}{y''}, \quad \frac{d^3Y}{dX^3} = -\frac{y'''}{y''^3}, \quad \ldots, \quad \frac{d^pY}{dX^p} = -\frac{y^{(p)}}{y''^{p+1}} + A,$$

A ne contenant que les dérivées d'ordre inférieur à p. Soit Φ une fonction de $\frac{d^2Y}{dX^2}, \ldots, \frac{d^pY}{dX^p}$. Par la transformation, elle se change en une fonction φ de $y'', \ldots, y^{(p)}$, divisée par une puissance de y''. L'équation $\varphi = 0$ est une *transformée corrélative* de $\Phi = 0$.

Appliquons cette transformation à l'équation $V = 0$, équation différentielle des coniques. D'après le principe de dualité, la transformée $v = 0$ ne doit différer de la proposée que par le changement des lettres. D'autre part, si dans V on prend le terme unique qui contient la dérivée cinquième de Y, on voit que celui-là seul fournit le terme de v contenant la dérivée cinquième de y. A un facteur numérique près, ce terme est (n° 18) $\left(\frac{d^3Y}{dX^3}\right)^2 \frac{d^5Y}{dX^5}$, qui fournit le terme $-\frac{1}{y''^9}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \frac{d^5y}{dx^5}$.

J'en conclus donc

$$V = -\frac{1}{y''^9} v.$$

Même raisonnement, à l'égard de la fonction Δ, conduit à un résultat tout pareil; car on sait que les courbes intégrales de $\Delta = 0$ se changent en elles-mêmes par des transformations corrélatives, par suite

$$\Delta = \frac{1}{y''^{21}} \delta;$$

d'où résultent, pour les invariants fondamentaux du huitième et du neuvième ordre,

$$T = -\frac{1}{y''^{28}} t, \quad \Theta = \frac{1}{y''^{16}} \theta, \quad \ldots.$$

L'exposant de y'' est constamment égal au poids de l'invariant; ce facteur disparaît donc dans les invariants absolus. D'où cette conséquence :

Dans une équation différentielle invariante du huitième ou du neuvième ordre

$$f\left(\frac{U^4 T}{V^4}, \frac{\Delta^4}{V^4}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad f\left(\frac{U^4 \Theta}{V^4}, \frac{U^4 T}{V^4}, \frac{\Delta^3}{V^3}\right) = 0,$$

il suffit de changer le signe de T *pour obtenir l'équation corrélative.*

Nous avons trouvé (n° 37) que

$$\Theta + \tfrac{1}{4} G - \frac{3^2.5}{2} TV^2 = 0$$

est l'équation différentielle des courbes du troisième degré. J'en déduis maintenant que

$$\Theta + \tfrac{1}{4} G + \frac{3^2.5}{2} TV^2 = 0$$

est l'équation différentielle des courbes de troisième classe.

J'ai de même

$$(G + 2.3^2 TV^2)^2 - 2^6.3 U^4 T^2 = 0$$

pour l'équation différentielle des courbes de troisième classe et du quatrième degré, déduite de celle des courbes du troisième degré à point double, et

$$2^{11} 3^{11} \Delta^8 P_2 = (h - 1) U^2 Q_2^3;$$

pour l'équation différentielle des courbes de troisième classe d'invariant absolu h, si P_2 et Q_2 désignent ce que deviennent les invariants P_1 et Q_1 du n° 38, par le changement de signe de T.

40. Ces résultats se généralisent aisément. Pour le montrer, il convient d'adopter un mode régulier de formation des invariants fondamentaux de chaque ordre, mode que j'ai abandonné ici, en me bornant au neuvième ordre, et en vue d'une application.

Désignons par T_8 l'invariant du huitième ordre désigné précédemment par T. Avec T_8 on a l'invariant absolu $U^4T_8V^{-4}$, et avec cet invariant absolu on peut former l'invariant du neuvième ordre que j'ai appelé S (n° 33). Je le désignerai par T_9; ainsi

$$T_9 = \left(\frac{U^4T_8}{V^4}\right)' \frac{V^5}{U^3} = UVT'_8 + 4(VU' - UV')T_8.$$

En passant de T_8 à T_9, on accroît le degré d'un nombre égal à celui de UV, c'est-à-dire de 4, et le poids d'un nombre égal à celui de UV, augmenté d'une unité, c'est-à-dire de 12. Ces deux nombres sont précisément égaux aux $\frac{4}{3}$ du degré et du poids de V. On formera donc l'invariant absolu $U^4T_9V^{-\frac{16}{3}}$, puis l'invariant du dixième ordre.

$$T_{10} = \left(U^4T_9V^{-\frac{16}{3}}\right)' \frac{V^{\frac{19}{3}}}{U^3} = UVT'_9 + 4\left(VU' - \tfrac{4}{3}UV'\right)T_9,$$

et ainsi de suite :

$$T_{11} = UVT'_{10} + 4\left(VU' - \frac{5}{3}\,UV\right)T_{10},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$T_n = UVT'_{n-1} + 4\left(VU' - \frac{n-6}{3}\,UV'\right)T_{n-1}.$$

Au moyen de ces invariants, on a maintenant cette proposition :

Toute équation différentielle invariante d'ordre $n > 8$ consiste en une relation entre les quantités

$$\Delta^3V^{-8},\ U^4T_8V^{-4},\ U^4T_9V^{-\frac{16}{3}},\ \ldots,\ U^4T_nV^{-\frac{n-\ }{3}}.$$

Si l'on y change les signes de $T_8, T_{10}, \ldots, T_{2k}$, *cette équation se change en sa corrélative.*

Nous pouvons aussi préciser le théorème XI comme il suit. Si l'on fait

$$\Delta^3 V^{-8} = \lambda, \quad U^4 T_8 V^{-4} = \mu,$$

on a

$$U^3 T_9 = 3 V \Delta' - 8 \Delta V' = \lambda' \frac{V^9}{\Delta^2} = \mu \frac{V^4}{U},$$

$$U^4 T_n V^{-4\frac{n-6}{3}} = UV^{-\frac{11}{3}} \left(U^4 T_{n-1} V^{-\frac{n-6}{3}}\right)' = \frac{\left(U^4 T_{n-1} V^{-4\frac{n-6}{3}}\right)'}{\lambda'} \mu\lambda^{\frac{2}{3}}.$$

En conséquence, si l'on prend λ pour variable indépendante, l'équation

$$f\left(\Delta^3 V^{-8}, U^4 T_8 V^{-4}, U^4 T_9 V^{-\frac{16}{3}}, \ldots, U^4 T_n V^{-4\frac{n-8}{3}}\right) = 0$$

se change en

$$f\left[\lambda, \mu, \mu\lambda^{\frac{2}{3}} \mu', \mu\lambda^{\frac{2}{3}} \left(\mu\lambda^{\frac{2}{3}} \mu'\right)', \ldots\right] = 0,$$

qui est, ainsi que l'indique le théorème XI, une équation différentielle d'ordre $(n - 8)$.

41. Pour peu qu'on réfléchisse à cette théorie des invariants différentiels, on y voit apparaître, comme dans la théorie des formes, des points dont l'évidence s'offre immédiatement. Dans la théorie des formes binaires, par exemple, il suffit de savoir que deux invariants relatifs peuvent composer un invariant absolu pour conclure que les formes quadratiques ou cubiques, ne pouvant avoir d'invariant absolu, n'ont certainement qu'un invariant relatif.

Ici la substitution envisagée contient huit arbitraires et permet de donner au système $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^6 y}{dx^6}$ des valeurs arbitraires. Il ne saurait donc exister d'invariant absolu formé avec ces quantités. D'ailleurs, avec trois invariants relatifs on peut former un invariant absolu; donc jusqu'au septième ordre *exclusivement* il ne peut exister au plus que deux invariants relatifs. Puis il est visible que, pour chaque ordre au delà, il ne peut exister qu'un invariant absolu vraiment nouveau.

Si maintenant on veut aborder la théorie des invariants formés avec les dérivées partielles d'une fonction de deux variables indépendantes, on peut prévoir la nature des résultats qui devront s'y rencontrer. La substitution contiendra quinze arbitraires, qui permettront de donner des valeurs arbitraires à x, y, z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\ldots$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$, au nombre de douze, et à trois des cinq dérivées du quatrième ordre; donc au-dessous du quatrième ordre il ne peut exister que deux invariants relatifs au plus. Et, en effet, on les connaît : ce sont les équations aux dérivées partielles des développables et des surfaces réglées qui les fournissent. Puis on aura deux invariants absolus distincts du quatrième ordre, six du cinquième ordre, etc.

Vu et approuvé.

Paris, le 26 juin 1878.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE-EDWARDS.

Permis d'imprimer.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

A. MOURIER.

DEUXIÈME THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Démonstration donnée par Dirichlet de la série de Fourier, et conditions découvertes par Riemann pour le cas non compris dans la méthode de Dirichlet.

Vu et approuvé.
Paris, le 26 juin 1878.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE-EDWARDS.

Permis d'imprimer.
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
A. MOURIER.

4645 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

ERRATA.

Page	Ligne	Au lieu de	Lisez
14	15 en descendant	celles	celle
22	19 »	$Y = ay$	$Y = y$
	23 »	fonction Φ	fonction Φ, d'ordre n
25	11 en remontant	est incommensurable	est imaginaire ou incommensurable
32	6 en descendant	quatrième	quotient
42	5 »	une constante arbitraire	des constantes arbitraires
44	7 en remontant	$(1 + z + z^2)^2$	$(1 + z + z^2)^3$
49	6 en descendant	T	U^3T
	10 »	a^9	a_9
52	8 »	$+3.2^8\eta$	$-3.2^8\eta$
53	13 en remontant	(22)	(24)
54	13 »	$2^3\zeta^3$	$2^9\zeta^3$
58	12 en descendant	T^9	T_9
	dernière ligne	$V^{-\frac{n-5}{3}}$	$V^{-4\frac{n-8}{3}}$

59 8 en descendant; rétablir ainsi cette ligne :

$$U^4 T_n V^{-4\frac{n-5}{3}} = UV^{-\frac{1}{3}} \left(U^4 T_{n-1} V^{-4\frac{n-6}{3}}\right)' = \frac{\left(U^4 T_{n-1} V^{-4\frac{n-6}{3}}\right)' \mu\lambda^{\frac{2}{3}}}{\lambda'}$$

11,50

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,